Raccolta di esercizi per gli studenti di **GEOMETRIA** - Cdl **Fisica**
Università di Bari
A. Lotta
A.A. 2024-25

1. Sia $(X, *)$ una struttura algebrica. Si assuma che $*$ sia associativa e dotata di elemento neutro e. Verificare che l'insieme $I \subset X$ di tutti gli elementi invertibili è un sottoinsieme stabile (chiuso) rispetto a $*$.

2. Posto $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} |\, x \neq 0\}$, stabilire che la struttura algebrica $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ la cui operazione interna è definita come segue:
$$(a, b, c) * (a', b', c') := (aa', bb', ac' + cb')$$
è un gruppo non abeliano.

3. Verificare che l'insieme Φ di tutte le funzioni del tipo
$$x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$$
dove a, b sono costanti e $a \neq 0$, è un gruppo di trasformazioni di $\mathbb{R}$.

4. Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da
$$K = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$
è stabile rispetto alla somma e alla moltiplicazione standard, e che, rispetto alle operazioni indotte $(K, +, \cdot)$ è un campo.

5. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $F_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da:
$$F_{a,b}(x, y) := (ax - by, bx + ay).$$
Posto
$$K = \{F_{a,b} : \ a, b \in \mathbb{R}\},$$
mostrare che $(K, +, \cdot)$ è un campo, dove le operazioni di somma e prodotto sono definite come segue:
$$F_{a,b} + F_{c,d} := F_{a+c,b+d}, \ F_{a,b} \cdot F_{c,d} := F_{a,b} \circ F_{c,d}.$$

6. Verificare in dettaglio la validità degli assiomi di spazio vettoriale per quel che concerne gli esempi: $V_1 \times V_2$ (prodotto diretto degli spazi vettoriali V_1 e V_2) e V^X (spazio delle funzioni dal'insieme X nello spazio vettoriale V).

7. Verificare che ogni funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del tipo

$$f(x, y) := (ax + by, cx + dy),$$

dove a, b, c, d sono costanti assegnate, è lineare.

8. Considerata la retta r di equazione $r : y = x$ in $\mathbb{R}^2$, mostrare che l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^2 \to r$$

che associa ad ogni punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ il piede H della perpendicolare a r condotta da P, è un'applicazione lineare. Determinare esplicitamente il nucleo $Ker(F)$ e darne un'interpretazione geometrica.

9. Fissato un punto x_0 dell'insieme X e un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, verificare che la funzione

$$F : V^X \to \mathbb{K}$$

tale che

$$F(f) := f(x_0) \quad \forall f \in V^X$$

che associa ad ogni funzione $f : X \to V$ il suo valore nel punto x_0, è una funzione $\mathbb{K}$-lineare.

10. Dati due spazi vettoriali V_1 e V_2 sullo stesso campo, e il loro prodotto diretto $V_1 \times V_2$, verificare che le applicazioni

$$p_1 : V_1 \times V_2 \to V_1,\ \ p_2 : V_1 \times V_2 \to V_2$$

definite da

$$p_1(v_1, v_2) := v_1, \quad p_1(v_1, v_2) := v_2,$$

sono lineari (esse si chiamano proiezioni canoniche dal prodotto diretto sui due fattori).

11. Dati due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V_1 e V_2 e W_1, W_2 sottospazi vettoriali rispettivamente di V_1 e V_2, verificare che $W_1 \times W_2$ è sottospazio vettoriale del prodotto diretto $V_1 \times V_2$.

12. Dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, verificare che la funzione

$$F : V \times V \to V \times V$$

definita da

$$F(u, v) := (-v, u)$$

è lineare.

13. Data un'applicazione lineare $F : V \to V'$ tra due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e un sottospazio vettoriale W' di V', mostrare che

$$W = \{v \in V : F(v) \in W'\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

14. Sia W un sottoinsieme non vuoto di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Provare che W è un sottospazio vettoriale di V se e solo se per ogni $u, v \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ risulta $\lambda u + \mu v \in \mathbb{K}$.

15. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

stabilire se l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è ingettiva.

16. Data l'apppicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y, z) = (x + y - z, y + 3z)$$

verificare che F è lineare, determinare esplicitamente $\mathrm{Ker}(F)$ e mostrare che

$$\mathrm{Ker}(F) \cong \mathbb{R}.$$

17. Verificare che i vettori

$$(1, 0, 1),\ (0, -1, 2), (0, 0, 1)$$

di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

18. Determinare una base del seguente sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((1, 0, 2, 1), (2, 0, 2, 0), (1, 0, 0, -1)).$$

19. Dato uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ ed un isomorfismo $F : \mathbb{K}^n \to V$, verificare che

$$\{F(e_1), \ldots, F(e_n)\}$$

è una base di V.

20. Mostrare che due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali finitamente generati V_1 e V_2 sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

21. Dati due sottospazi U_1 e U_2 di uno spazio vettoriale V, verificare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

a) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

b) Per ogni $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ si ha:

$$u_1 + u_2 = 0 \ \Rightarrow \ u_1 = u_2 = 0.$$

22. Mostrare che dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V, il sottospazio somma $U+W$ è il più piccolo sottospazio contenente entrambi. Ovvero, se E è un qualunque sottospazio contenente sia U che W, allora si ha:

$$U + W \subset E.$$

23. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali U e V di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((1,0,2,1),(2,0,2,0),(1,0,0,-1)), \quad V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2y = 0\}.$$

Determinare la dimensione ed una base di U, V e di $U \cap V$.

24. Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((1,0,0,1),(0,1,-1,0)), \quad V = L((1,2,-2,1),(0,0,0,1)).$$

Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.

25. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}_2[x]$ costituito da tutti i polinomi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di grado al massimo 2. Verificare che

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(-1) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale, e determinarne la dimensione ed una base.

26. Provare che $\mathbb{C}$, pensato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ha dimensione 2 e determinare una base di tale spazio vettoriale.

27. Verificare che, dato un campo $\mathbb{K}$, per ogni $n \geq 1$, la dimensione di $Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ è n, mostrando che l'applicazione

$$\Phi : Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n,$$

definita ponendo:

$$\Phi(F) := (F(e_1), \ldots, F(e_n))$$

è un isomorfismo.

28. Si ponga

$$E = \{p \in \mathbb{R}_4[x] | \ gr(p) \leq 3, \ p(1) = 0\}, \ \ F = L(x^4, x^3 - x^2, x - 1).$$

a) Provare che E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4[x]$. Determinarne una base.

b) Determinare una base di $E \cap F$ ed una base di $E + F$.

29. Si determinino le dimensioni del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_2 + x_4, 2x_1 - 2x_4, 3x_1 + x_2 - x_4).$$

30. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ e siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari tali che

$$M_{\mathfrak{B}_o}^{\mathfrak{B}_o}(F) = A, \quad M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(G) = B$$

dove $\mathfrak{B}_o$ denota la base canonica, mentre $\mathfrak{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1)\}$.

Stabilire per quali valori di k risulta $F = G$.

31. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k+3 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

a) Determinare esplicitamente F.

b) Stabilire per quali valori di k F è surgettiva.

c) Determinare una base di $Ker(F)$ ed una base di $Im(F)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

32. Si considerino le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, tali che F è associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 1 \\ 1 & k & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{R}$, mentre

$$G(1, 1) = (0, 0, 1, 1), \; G(1, -1) = (1, 1, 0, 0).$$

a) Determinare una base di $Ker(F)$ al variare di k.

b) Determinare una base di $Im(G)$.

c) Stabilire se vi sono valori di k per cui $G \circ F$ è un isomorfismo.

33. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & k & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R}$$

rispetto alla base canonica e ad una base assegnata $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Determinare una base di $Ker(F)$ ed una base di $Im(F)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

34. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$F(a, b) = (a - b)x + 2bx^2 + b.$$

a) Determinare la matrice associata a F rispetto alle basi

$$\mathfrak{B} = \{(1, -1), (1, 1)\} \quad \mathfrak{B}' = \{x - 1, x^2 + 1, x + 1\}$$

di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}_2[x]$ rispettivamente.

b) Stabilire se F è surgettiva e/o ingettiva.

c) Stabilire che non esiste alcuna base $\mathfrak{B}''$ di $\mathbb{R}^2$ per cui risulti:

$$M_{\mathfrak{B}''}^{\mathfrak{B}'}(F) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

35. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

a) Stabilire per quali valori di k risulta $(0, 1, -1, 0) \in Im(f)$.

b) Stabilire per quali valori di k f è diagonalizzabile.

36. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & k+1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$

sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ associato ad A rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}.$$

Studiare la diagonalizzabilità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$.

37. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 2k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

a) Detta $\mathfrak{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, determinare esplicitamente l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ e $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$.

b) Stabilire se f è diagonalizzabile.

38. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se f è diagonalizzabile.

(b) Tenendo conto di (a), verificare che non esiste una base $\mathfrak{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di f rispetto a $\mathfrak{B}$ sia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$