Prova scritta di **Geometria 2**
23 Giugno 2023

Esercizio 1. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + z + t = 0\},$$

munito del prodotto scalare indotto da quello standard di $\mathbb{R}^4$.

a) Si determini una base ortonormale di V e la si completi ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

b) Mostrare che l'endomorfismo $F : V \to V$ definito da:

$$F(x, y, z, t) := (x, 2y - z, 2z - y, t)$$

è simmetrico, e si determini una base ortonormale di V costituita da autovettori di F.

Esercizio 2. Sia fissato in $E_3(\mathbb{R})$ il riferimento cartesiano standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

.

a) Si stabilisca se r e s sono complanari e, in caso affermativo, si determini il piano che le contiene.

b) Determinare le sfere Σ_1 e Σ_2 aventi centro sulla retta s, raggio $\sqrt{3}$, e tangenti alla retta r.

Esercizio 3. Sia fissato in $E_2(\mathbb{R})$ il riferimento cartesiano standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$. Si considerino i punti

$$P_0(1, 1), \qquad P_1(1, 2), \qquad P_2(-1, 0),$$
$$Q_0(2, 0), \qquad Q_1(3, 0), \qquad Q_2(1, -2).$$

a) Verificare che (P_0, P_1, P_2) e (Q_0, Q_1, Q_2) sono terne di punti affinemente indipendenti.

b) Determinare le equazioni dell'affinità φ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per $i = 0, 1, 2$.

c) Determinare i punti uniti di φ.

c) Si stabilisca se φ è una isometria e, in caso affermativo, la si classifichi.