

Prova scritta di **Geometria 2**  
20 Settembre 2023

**Esercizio 1.** a) Si consideri l'endomorfismo  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che  $L := F \circ F$  è un endomorfismo simmetrico e determinare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  costituita da autovettori di  $L$ .

b) Provare in generale, che se  $F : (V, g) \rightarrow (V, g)$  e  $G : (V, g) \rightarrow (V, g)$  sono endomorfismi simmetrici di uno spazio vettoriale Euclideo, tali che

$$F \circ G = G \circ F,$$

allora  $L := F \circ G$  è anch'esso simmetrico.

**Esercizio 2.** Sia fissato in  $E_3(\mathbb{R})$  il riferimento cartesiano standard  $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$ . Si considerino la circonferenza

$$\mathcal{C} = \Sigma \cap \alpha : \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases}$$

- a) Determinare centro e raggio della circonferenza  $\mathcal{C}$ .
- b) Determinare la sfera  $\Sigma'$  contenente la circonferenza  $\mathcal{C}$  e passante per il punto  $P(-2, 0, 0)$ .

**Esercizio 3.** Sia fissato in  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$  il riferimento affine standard  $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$ . Si consideri l'affinità  $\varphi$  di equazioni:

$$\varphi : \begin{cases} x' = -2z + 1 \\ y' = x + y + 2z - 1 \\ z' = -y + z \end{cases}$$

- a) Verificare che l'insieme  $S$  dei punti uniti di  $\varphi$  è non vuoto. Determinare quindi la dimensione ed equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio affine  $S$ .
- b) Considerato il piano  $\alpha : x + 2y - 3 = 0$ , determinare equazioni parametriche e cartesiane di  $\varphi(\alpha)$ .