

Prova scritta di **Geometria 2**
20 Settembre 2023

Esercizio 1. a) Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che $L := F \circ F$ è un endomorfismo simmetrico e determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di L .

b) Provare in generale, che se $F : (V, g) \rightarrow (V, g)$ e $G : (V, g) \rightarrow (V, g)$ sono endomorfismi simmetrici di uno spazio vettoriale Euclideo, tali che

$$F \circ G = G \circ F,$$

allora $L := F \circ G$ è anch'esso simmetrico.

Esercizio 2. Sia fissato in $E_3(\mathbb{R})$ il riferimento cartesiano standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$. Si considerino la circonferenza

$$\mathcal{C} = \Sigma \cap \alpha : \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases}$$

a) Determinare centro e raggio della circonferenza \mathcal{C} .

b) Determinare la sfera Σ' contenente la circonferenza \mathcal{C} e passante per il punto $P(-2, 0, 0)$.

Esercizio 3. Sia fissato in $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ il riferimento affine standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$. Si consideri l'affinità φ di equazioni:

$$\varphi : \begin{cases} x' = -2z + 1 \\ y' = x + y + 2z - 1 \\ z' = -y + z \end{cases}$$

a) Verificare che l'insieme S dei punti uniti di φ è non vuoto. Determinare quindi la dimensione ed equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio affine S .

b) Considerato il piano $\alpha : x + 2y - 3 = 0$, determinare equazioni parametriche e cartesiane di $\varphi(\alpha)$.