Prova scritta di **Geometria 2**
10 Luglio 2023

Esercizio 1. Si consideri il seguente endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$:

$$F(x, y, z, t) := (\alpha x - \alpha y, \beta z - \beta t, \alpha x + \alpha y, \beta z + \beta t),$$

dove α e β sono parametri reali. Si consideri $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard.

a) Stabilire per quali valori di α e β, F è una trasformazione ortogonale.

b) In corrispondenza di tali valori, determinare una base ortonormale del sottospazio

$$F^{-1}(W)$$

dove F^{-1} denota l'inverso di F, mentre W è il sottospazio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t = 0\}.$$

Esercizio 2. Sia fissato in $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ il riferimento affine standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$. Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ i sottospazi affini di $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ definiti da

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z + t = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{T} : \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + t + 2 = 0 \end{cases}$$

a) Stabilire se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono incidenti e, in caso affermativo, deteminare la dimensione di $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, una base della giacitura, e un sistema di equazioni parametriche.

b) Determinare la dimensione di $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$, una base della giacitura, ed un sistema di equazioni cartesiane.

Esercizio 3. Sia fissato in $E_2(\mathbb{R})$ il riferimento cartesiano standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$. Sia consideri la retta

$$r : x + 3y - 2 = 0,$$

e sia $\varphi : E_2(\mathbb{R}) \to E_2(\mathbb{R})$ la riflessione rispetto alla retta r.

a) Si determinino le equazioni di φ.

b) Considerata la traslazione t_v di vettore $v = (1, k)$, si stabilisca per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'isometria $t_v \circ \varphi$ è una riflessione.