Raccolta di esercizi per gli studenti di *Geometria 2* - Cdl Matematica, Bari
A. Lotta
A.A. 2022-23

Alcuni dei seguenti esercizi sono tratti da prove d'esame assegnate negli anni passati nei corsi di Geometria del primo biennio del Cdl in Matematica

Salvo avviso contrario, V denota uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 1$, mentre (V, g) denota uno spazio vettoriale Euclideo della stessa dimensione.

$M_n(\mathbb{R})$ denota lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n.

Salvo avviso contario, $\{e_i\}$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e, se non specificato altrimenti, $\mathbb{R}^n$ si intende munito del prodotto scalare standard. Si usa $d(P, Q)$ per denotare la distanza di due punti P e Q in uno spazio affine Euclideo.

1. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Provare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

   a) b è definita positiva o definita negativa;

   b) per ogni $v \in V - \{0\}$ si ha $b(v, v) \neq 0$.

2. Sia $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ una base dello spazio duale V^* di V. Verificare che l'applicazione $g : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da:
$$g(v, w) := \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v)\varphi_i(w)$$
   è un prodotto scalare su V.

3. Sia $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ il sottospazio di $M_n(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici simmetriche. Mostrare che il complemento ortogonale di $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto scalare
$$< A, B >= \mathrm{tr}({}^tAB)$$
   è il sottospazio $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici antisimmetriche (cioè tali che ${}^tA = -A$).

4. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale Euclideo (V, g). Provare che la proiezione ortogonale $p_W : V \to V$ su W è un'applicazione lineare, tale che
$$Ker(p_W) = W^{\perp},\ Im(p_W) = W.$$
   Nel caso in cui W è non banale e diverso da V, verificare che p_W è diagonalizzabile, e che ammette 0 e 1 come autovalori.

5. Provare che per ogni sottospazio W di uno spazio vettoriale Euclideo (V, g) si ha:
$$(W^\perp)^\perp = W.$$

6. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} k & k & k \\ k & 2k-1 & 1 \\ k & 1 & 3k \end{pmatrix}$$
rispetto alla base canonica, è definita positiva.

   In corrispondenza di tali valori, si determini una base di $W^\perp$, dove
$$W =< e_1 + e_2, e_1 - e_3 >$$
ed il complemento ortogonale è rispetto a b.

7. Si assuma $n = 3$. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ associata alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} k^2 & k^2 & k^2 \\ k^2 & k^2+k+1 & k^2-k-1 \\ k^2 & k^2-k-1 & k^2+1 \end{pmatrix}$$
rispetto ad una fissata base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è definita positiva.

8. Determinare la dimensione ed una base ortogonale del sottospazio
$$W =< (1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (1, 2, 0, 3) >$$
di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare standard. Determinare inoltre la proiezione ortogonale di e_1 su $W^\perp$.

9. Determinare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^3, g)$ dove g è il prodotto scalare associato, rispetto alla base canonica, alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore $v = (1, 1, 1)$.

11. Si consideri la forma quadratica q su $\mathbb{R}^3$ definita da

$$q(x, y, z) = xy + z^2.$$

a) Si consideri il sottospazio $W =< (1, 1, 0), (0, 0, 1) >$ di $\mathbb{R}^3$. Verificare che la restrizione di q a W è definita positiva.

b) Determinare una base ortonormale dello spazio Euclideo $(W, <, >)$ essendo $<, >$ il prodotto scalare determinanto dalla restrizione di q a W.

12. Si consideri la forma bilineare simmetrica g su $\mathbb{R}^3$ associata, rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Provare che $(\mathbb{R}^3, g)$ è uno spazio vettoriale Euclideo.

2) Posto $W =< e_1, e_3 >$, si determini una base $\{u_1, u_2\}$ di W ortonormale rispetto a g e la si completi ad una base ortonormale di $(\mathbb{R}^3, g)$.

3) Si determinino $w \in W$ e $u \in W^\perp$ tali che

$$e_2 = w + u,$$

il complemento ortogonale essendo rispetto a g.

13. Verificare che l'applicazione $F : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $F(A) = {}^tA$ è una trasformazione ortogonale, dove $M_n(\mathbb{R})$ è dotato del prodotto scalare $<, >$ di cui nell'Es. 3.

14. Si consideri una matrice $A \in O(2)$. Verificare quanto segue:

Se $\det(A) = 1$, allora A è diagonalizzabile se e solo se $A = \pm I_2$.

Se $\det(A) = -1$, allora A è diagonalizzabile.

15. Determinare esplicitamente tutte le matrici $A \in SO(3)$ tali che $Ae_1 = e_1$.

16. Si supponga che (V, g) abbia dimensione 3; siano (U_1, U_2) e (W_1, W_2) due coppie di sottospazi con

$$\dim(U_i) = \dim(W_i) = i, \quad i = 1, 2$$

e

$$U_1 \subset U_2,\ W_1 \subset W_2.$$

Provare che esiste una trasformazione ortogonale $F : V \to V$ tale che

$$F(U_1) = W_1, \quad F(U_2) = W_2.$$

Determinare esplicitamente una tale F nel caso in cui $V = \mathbb{R}^3$ e i sottospazi coinvolti sono i seguenti:

$$U_1 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \ U_2 : z = 0, \ W_1 =< (0,1,1) >, \ W_2 =< (0,1,1), (0,1,2) > .$$

17. Si supponga $\dim(V) = 2$. Mostrare che, dati due vettori $u, v \in V$ tali che

$$||u|| = ||v|| \neq 0,$$

esistono esattamente due trasformazioni ortogonali $F : (V, g) \to (V, g)$ e $G : (V, g) \to (V, g)$ tali che

$$F(u) = v, \ G(u) = v.$$

Determinare esplicitamente tali trasformazioni ortogonali nel caso in cui $V = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $v = (\sqrt{3}, -\sqrt{2})$.

18. Dimostrare che, data una trasformazione ortogonale $F : V \to V$ e un sottospazio vettoriale W di V, si ha:

$$F(W^\perp) = F(W)^\perp.$$

19. Sia $n = 2$ e E un piano affine Euclideo associato a V. Siano P, Q, e R punti distinti di E. Mostrare che vale la relazione

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q) \qquad (*)$$

se e solo se esiste un riferimento affine $\mathcal{R}$ di E rispetto al quale si abbia:

$$P(0, 0), \ Q(1, 0), \ R(x, 0), \quad 0 < x < 1.$$

20. Verificare che, dati due punti distinti P, Q di $\mathbb{R}^2$, i punti R, diversi da P e Q per cui sussiste la (*) sono tutti e soli quelli del tipo

$$R = tP + (1 - t)Q, \quad 0 < t < 1.$$

21. a) Mostrare che per ogni iperspazio W di (V, g) esiste una ed una sola trasformazione ortogonale $\sigma_W : V \to V$, diversa dall'indentità Id_V, che fissa tutti i vettori di W, cioè tale che

$$\sigma_W(w) = w, \quad \forall w \in W.$$

Tale σ_W si chiama *simmetria ortogonale relativa a* W.

b) Verificare che ogni simmetria ortogonale $\sigma := \sigma_W$ ha le seguenti proprietà:

(a) $\det(\sigma) = -1$

(b) $\sigma^2 = Id_V$

(c) σ è diagonalizzabile.

c) Per ogni vettore non nullo $u \in V$, si denoti con σ_u la simmetria ortogonale relativa all'iperspazio $< u >^{\perp}$.

(a) Verificare che

$$\sigma_u(v) = v - 2\frac{g(v,u)}{g(u,u)}v \quad \forall v \in V.$$

(b) Verificare che, se u e v sono due vettori linearmente indipendenti, allora

$$g(u,v) = 0 \iff \sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_v \circ \sigma_u.$$

22. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.

23. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base $\mathfrak{B} = \{(0,-1,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Provare che f è simmetrico rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

2) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.

24. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1,0) = (1,0,2),\ F(1,-1,0) = (1,0,2),\ F(0,0,1) = (2,0,3).$$

Stabilire se F è simmetrico rispetto al prodotto scalare standard $<,>$.

25. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(v) = (v \cdot v_o)\, u_o + (v \cdot u_o) v_o \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$$

dove u_o e v_o sono vettori fissati, ed il simbolo $\cdot$ denota il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

a) Mostrare che F è un endomorfismo simmetrico di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.

b) Nel caso in cui $u_o = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $v_o = (0, 1, 0)$, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F.