Appunti per gli studenti del corso di Geometria 2

A. Lotta

A.A. 2022/23

1 Ortogonalità in uno spazio vettoriale Euclideo

Teorema 1.1 *Siano $g : V \to V \times \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 1$ e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Si assuma che la restrizione $g|_{W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ di g a W sia definita positiva. Allora*

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Dimostrazione: Osserviamo che possiamo supporre $W \neq \{0\}$, perchè rispetto a qualunque forma bilineare simmetrica si ha sempre $\{0\}^{\perp} = V$ e quindi se il sottospazio è banale, l'asserto è senz'altro vero.

Inoltre abbiamo

$$W \cap W^{\perp} = \{0\}$$

in quanto l'ipotesi sulla restrizione di g a W garantisce che non esistono vettori $w \in W$ non nulli tali che $g(w, w) = 0$. Resta quindi da provare che $V = W + W^{\perp}$. Discuteremo due diverse dimostrazioni di questo fatto.

PRIMA DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'applicazione

$$\psi : V \to W^*$$

definita da

$$\psi(g) := b_g|_W.$$

Si lascia allo studente la verifica del fatto che ψ è lineare. Notiamo che

$$Ker(\psi) = W^{\perp}.$$

Infatti:

$$W^{\perp} = \{v \in V \,|\, \forall w \in W : \; b(v, w) = 0\} = \{v \in V \,|\, b_v|_W = 0\} = Ker(\psi).$$

Da ciò segue che la restrizione

$$\psi|_W : W \to W^*$$

ha nucleo banale, in quanto $W \cap W^\perp = \{0\}$, ovvero è un monomorfismo. Di fatto si tratta di un isomorfismo, perchè W e il suo duale hanno la stessa dimensione. Dunque $\psi|_W$ è surgettiva, e ciò permette di concludere che tale è l'applicazione di partenza $\psi : V \to W^*$. Usando il Teorema del rango, siamo ora in grado di calcolare la dimensione di $W^\perp$; infatti abbiamo:

$$\dim(V) = \dim(Im(\psi)) + \dim(Ker(\psi)) = \dim(W^*) + \dim(Ker(\psi))$$

cioè

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$$

e con ciò resta provato che $V = W + W^\perp$.

SECONDA DIMOSTRAZIONE: Questa seconda prova utilizza il Teorema di Sylvester, che garantisce l'esistenza di basi ortonormali in ogni spazio vettoriale Euclideo. Fissiamo una base ortonormale $\mathfrak{B} = \{w_1, \ldots, w_k\}$ di W, rispetto alla restrizione di g a W, dove $k = \dim(W)$. Dato un vettore qualsiasi $v \in V$, osserviamo che il vettore

$$u := v - \sum_{i=1}^{k} g(v, w_i) w_i$$

appartiene a $W^\perp$; per verificare questo, è sufficiente controllare che w è ortogonale a ciascuno dei vettori della base $\mathfrak{B}$. In effetti, per ogni $j \in \{1, \ldots, k\}$ abbiamo:

$$g(u, w_j) = g(v, w_j) - g(\sum_{i=1}^{k} g(v, w_i) w_i, w_j) = g(v, w_j) - g(v, w_j) = 0.$$

Conclusione:

$$v = w + u$$

dove abbiamo posto $w := \sum_{i=1}^{k} g(v, w_i) w_i \in W$ e ciò prova, stante l'arbitrarietà di v, che $V = W + W^\perp$.

Corollario 1.2 *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Allora, per ogni sottospazio W di V si ha:*

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Questo risultato permette di definire il concetto di **proiezione ortogonale** di un vettore $v \in V$ su un sottospazio W: assunto che

$$v = w + u$$

con $w \in W$ e $u \in W^\perp$, tale proiezione è, per definizione, il vettore w. Naturalmente tale definizione ha senso perchè la coppia (w, u) è univocamente determinata da v.

Denoteremo la proiezione ortogonale di v sul sottospazio W con il simbolo $p_W(v)$. Notiamo che $p_W(v)$ è caratterizzato come l'unico vettore di W tale che

$$v - p_W(v) \in W^\perp.$$

Resta definita l'applicazione

$$p_W : V \to V,\ v \mapsto p_W(v).$$

Essa si chiamerà **proiezione ortogonale sul sottospazio** W.

Si osservi che, nei casi limite in cui $W = \{0\}$ e $W = V$, abbiamo rispettivamente $p_{\{0\}} = 0$ e $p_V = Id_V$.

La dimostrazione del risultato seguente è lasciata come esercizio:

Proposizione 1.3 *Per ogni sottospazio W di uno spazio vettoriale Euclideo (V, g), la proiezione ortogonale $p_W : V \to V$ è un endomorfismo di V, ed inoltre:*

$$Ker(p_W) = W^\perp, \quad Im(p_W) = W.$$

2 Il criterio di Sylvester

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica di ordine $n \geq 1$. Dato i un intero, $1 \leq i \leq n$, si chiama *minore principale di A di ordine i* il minore individuato dalle prime i righe e dalle prime i colonne di A. In particolare, il minore principale di ordine 1 è l'elemento a_{11} di A, mente il minore principale di ordine massimo n è il $\det(A)$.

Teorema 2.1 *(Sylvester) Sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale reale V di dimensione $n \geq 1$.*

Sia $A = M_{\mathcal{B}}(g)$ la matrice associata a g rispetto a una fissata base $\mathcal{B}$ di V.

Allora g è definita positiva se e solo se tutti i minori principali di A sono strettamente positivi.

Dimostreremo il Teorema per induzione su n. A questo scopo, è utile premettere alcune osservazioni basilari.

Nota importante: Se A e A' sono le matrici associate a g rispetto a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V, allora $\det(A)$ e $\det(A')$ hanno *lo stesso segno.*

Infatti, sappiamo che A e A' sono congruenti, ovvero esiste $M \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che

$$A' = {}^tMAM.$$

Per il Teorema di Binet segue che

$$\det(A') = \det(M)^2 \cdot \det(A),$$

e di qui la conclusione.

Proposizione 2.2 *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione $n > 1$ e sia $W \subset V$ un iperspazio, cioè un sottospazio vettoriale di V di dimensione $n-1$.*

Siano g una forma bilineare simmetrica su V e A la matrice associata a g rispetto a una fissata base $\mathcal{B}$ di V. Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè g sia definita positiva è che $g|_{W\times W}$ sia definita positiva e $\det(A) > 0$.

Dimostrazione: Supponiamo che g sia definita positiva. Allora certamente tale è la restrizione $g|_{W\times W}$. Fissiamo una base ortonormale $\mathcal{B}_o = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ di W rispetto al prodotto scalare $g|_{W\times W}$. Sappiamo inoltre che

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Fissiamo un vettore non nullo v_n in $W^{\perp}$, di modo che $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, ortogonale rispetto a g. La matrice A' associata a g rispetto a tale base è dunque del tipo

$$A' = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$$

dove $\lambda = g(v_n, v_n) > 0$. Quindi $\det(A') = \lambda > 0$ e quindi, ricordando la Nota precedente, è vero anche che $\det(A) > 0$.

Proviamo ora che la condizione enunciata è sufficiente affinchè g sia definita positiva. Innanzitutto, il Teorema 1.1 e l'ipotesi garantiscono che vale ancora:

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Possiamo quindi ancora considerare una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V del tipo

$$\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\},$$

dove $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è base ortonormale per $g|_{W\times W}$. Dunque la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'}(g)$ è sempre diagonale della forma:

$$A' = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$$

e stante l'ipotesi $\det(A') > 0$, ovvero $\lambda > 0$. Pertanto (per il Teorema di Sylvester) g ha segnatura $(n, 0)$, ovvero è definita positiva. □

Ciò premesso, possiamo procedere con la dimostrazione del criterio di Sylvester. Se $n = 1$ il teorema è di immediata dimostrazione. Supponiamo $n > 1$ e che il risultato sia vero per spazi vettoriali di dimensione $n-1$. Considerata la base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(g)$, notiamo che A si può rappresentare a blocchi come segue:

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ {}^t u & \lambda \end{pmatrix},$$

dove B è una matrice simmetrica di ordine $n-1$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ è un vettore colonna di lunghezza $n-1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Abbiamo che la sottomatrice B coincide con la matrice della restrizione di g all'iperspazio $W =< v_1, \ldots, v_{n-1} >$, rispetto alla base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ di quest'ultimo. Tenendo presente la definizione, osserviamo anche che i minori principali $M_1, \ldots, M_{n-1}$ di A di ordine $< n$ sono tutti e soli i minori principali di B.

Ora, applicando la Proposizione precedente abbiamo che g è definita positiva se e solo se $g|_{W \times W}$ è definita positiva e $\det(A) > 0$, il che accade, per l'ipotesi induttiva applicata a $g|_{W \times W}$, se e solo $M_i > 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ e $\det(A) > 0$, ovvero se e solo se tutti i minori principali di A sono positivi.

3 L'algoritmo di Gram-Schmidt

In tutto il paragrafo (V, g) denota uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione $n \geq 1$.

Cominciamo introducendo una terminologia che generalizza la nozione di base ortonormale.

Definizione 3.1 Una sequenza di vettori $v_1, \ldots, v_k$ di V, dove $k \geq 1$, si dice *ortogonale* se

$$g(v_i, v_j) = 0$$

per ogni $i \neq j$. Se inoltre, tutti i vettori v_i sono non nulli (risp. se ogni vettore soddisfa $g(v_i, v_i) = 1$), diciamo che la sequenza è un *sistema ortogonale* di vettori (risp. *sistema ortonormale*).

Una *base ortogonale* di V è ogni base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, tale che $v_1, \ldots, v_n$ è una sequenza ortogonale.

Teorema 3.2 *Se $v_1, \ldots, v_k$ è un sistema ortogonale, allora i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti, si supponga che

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$$

dove i λ_i sono scalari. Fissiamo j, $1 \leq j \leq k$; considerando il prodotto scalare di ambo i membri con v_j segue

$$\lambda_j g(v_j, v_j) = 0$$

da cui, essendo $v_j \neq 0$:

$$\lambda_j = 0.$$

□

Vale il seguente fatto importante, che è un'applicazione immediata del Corollario 1.2:

Proposizione 3.3 *Ogni sistema di vettori ortogonale $v_1, \ldots, v_k$ può essere completato ad una base ortogonale $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V.*

Basta infatti considerare una base ortogonale $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ del sottospazio

$$< v_1, \ldots, v_k >^{\perp} .$$

Definizione 3.4 Per ogni $v \in V$, lo scalare

$$||v|| := \sqrt{g(v, v)}$$

si chiama la *norma* (talvolta anche *lunghezza*) del vettore v.

Ogni sistema di vettori ortogonale $v_1, \ldots, v_k$ ne determina uno ortonormale:

$$\frac{v_1}{||v_1||}, \cdots, \frac{v_k}{||v_k||}.$$

In particolare, ogni base ortogonale ne determina canonicamente una ortonormale.

Ci proponiamo ora di illustrare un metodo efficiente per costruire basi ortogonali (diverso dal procedimento generale di diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica già noto allo studente).

Data ora una sequenza di vettori

$$v_1, \ldots, v_k$$

per ogni $i \in \{0, \ldots, k\}$ denoteremo con

$$p_i : V \to V$$

la proiezione ortogonale relativa al sottospazio $< v_1, \dots, v_i >$ dai primi i vettori della sequenza, convenendo che $p_0 = 0$, cioè che p_0 sia la proiezione relativa al sottospazio nullo $\{0\}$.

Chiameremo *sequenza di Gram-Schmidt* associata alla sequenza in questione, la sequenza

$$v'_1, \dots, v'_k$$

dove, per definizione, poniamo:

$$v'_i := v_i - p_{i-1}(v_i).$$

Dunque si ha sempre

$$v'_1 = v_1.$$

Teorema 3.5 *La sequenza di Gram-Schmidt $v'_1, \dots, v'_k$ associata ad una sequenza $v_1, \dots, v_k$ ha le seguenti proprietà:*

a) $v'_1, \dots, v'_k$ è una sequenza ortogonale;

b) $\mathfrak{B} = \{v'_i |\, v'_i \neq 0\}$ è una base ortogonale del sottospazio $< v_1, \dots, v_k >$ generato dai vettori della sequenza.

Dimostrazione: a) Fissati due indici $i \neq j$, supponendo ad esempio $i < j$, abbiamo che $v'_j = v_j - p_{j-1}(v_j)$ è ortogonale a tutti i vettori $v_1, \dots, v_{j-1}$ e quindi in particolare a $v_1, \dots, v_i$, dunque appartiene a $< v_1, \dots, v_i >^{\perp}$.

Poichè $v'_i = v_i - p_{i-1}(v_i)$ appartiene a $< v_1, \dots, v_i >$, segue che $g(v'_i, v'_j) = 0$.

b) Ragioniamo per induzione su k. Se $k = 1$ la tesi è banale, avendosi $v'_1 = v_1$.

Supponiamo quindi $k > 1$ e l'enunciato vero per sequenze di vettori di lunghezza $k-1$. Se consideriamo una sequenza $v_1, \dots, v_k$, allora la sequenza di Gram-Schmidt di $v_1, \dots, v_{k-1}$ coincide con $v'_1, \dots, v'_{k-1}$; dunque per l'ipotesi induttiva

$$\mathfrak{B}' = \{v'_i |\, i \leq k-1 \text{ e } v'_i \neq 0\}$$

è una base ortogonale di $< v_1, \dots, v_{k-1} >$. A questo punto vi sono due possibilità:

i) $v'_k = 0$;
ii) $v'_k \neq 0$.

Nel primo caso, risulta che $v_k = p_{k-1}(v_k)$ è combinazione lineare dei vettori che lo precedono, e quindi

$$< v_1, \dots, v_k >=< v_1, \dots, v_{k-1} >$$

e ciò comporta che $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ è anche base ortogonale di $< v_1, \ldots, v_k >$, coerentemente con la tesi da provare.

Nel secondo caso, abbiamo necessariamente che $v_k \notin < v_1, \ldots, v_{k-1} >$ (altrimenti si avrebbe $v_k = p_{k-1}(v_k)$, cioè $v'_k = 0$); in particolare:

$$\dim(< v_1 \ldots, v_k >) = \dim(< v_1, \ldots, v_{k-1} >) + 1.$$

Poniamo $s = \dim(< v_1, \ldots, v_{k-1} >)$. Abbiamo, per costruzione, che $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \cup \{v'_k\}$ e tale insieme è libero perchè, stante la a), i vettori che lo costituiscono formano un sistema ortogonale. Siccome $|\mathfrak{B}| = s + 1$ possiamo concludere che $\mathfrak{B}$ è una base di $< v_1 \ldots, v_k >$. $\square$

Osservazione: Notiamo, come conseguenza di questo risultato, che i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se i vettori $v'_1, \ldots, v'_k$ sono tutti non nulli.

Corollario 3.6 *Data una sequenza $v_1, \ldots, v_k$, abbiamo che, per ogni i, $1 \leq i \leq k$:*

$$< v_1, \ldots, v_i > = < v'_1, \ldots, v'_i > .$$

Ciò segue applicando direttamente la b) del Teorema precedente alla sottosequenza $v_1, \ldots, v_i$.

L'utilità della sequenza di Gram-Schmidt sta nel fatto seguente:

Teorema 3.7 *Assegnata una sequenza $v_1, \ldots, v_k$, i vettori della corrispondente sequenza di Gram-Schmidt $v'_1, \ldots, v'_k$ soddisfano le seguenti relazioni ricorsive:*

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \\ v'_i &= v_i - \sum_{\substack{t=1 \\ v_t \neq 0}}^{i-1} \tfrac{g(v_i, v'_t)}{||v'_t||^2} v'_t, \quad i > 1. \end{aligned} \tag{GS}$$

Le relazioni (GS) sono di semplice verifica, stante il fatto che, fissato $i > 1$, per la b) del Teorema precedente i vettori $v'_1, \ldots, v'_{i-1}$ determinano una base ortonormale

$$\{\frac{v'_t}{||v'_t||} \mid v'_t \neq 0,\ 1 \leq t \leq i - 1\}$$

di $< v_1, \ldots, v_{i-1} >$. Sfruttando tale base, la proiezione ortogonale $p_{i-1}(v_i)$ di v_i si può esplicitare, come sappiamo, come segue (cfr. la seconda dimostrazione del Teorema 1.1):

$$p_{i-1}(v_i) = \sum_{\substack{t=1 \\ v'_t \neq 0}}^{i-1} \frac{g(v_i, v'_t)}{||v'_t||^2} v'_t.$$

Le (GS) sono importanti, perchè permettono di determinare in modo esplicito i vettori della sequenza di Gram-Schmidt, senza far uso della loro definizione, ignorando cioè le proiezioni ortogonali: ogni vettore v'_i è costruibile applicando direttamente la formula (GS), dopo aver costruito i precedenti $v'_1, \ldots, v'_{i-1}$.

Le formule (GS) costituiscono **l'algoritmo di Gram-Schmidt** per la costruzione di basi ortogonali.

Osserviamo ancora esplicitamente che se l'algoritmo viene applicato a una sequenza di vettori *linearmente indipendenti*, allora è noto a priori che tutti i vettori che vengono determinati ad ogni passo sono non nulli, quindi nelle sommatorie la clausola $v'_t \neq 0$ è superflua. Tipicamente, l'algoritmo viene applicato ad una base di V, dando in output una base ortogonale di (V, g).

4 Isometrie lineari e matrici ortogonali

In questo paragrafo denotiamo con (V, g) e (W, g') due spazi vettoriali Euclidei della stessa dimensione $n \geq 1$.

Definizione 4.1 Diremo che un'applicazione $F : (V, g) \to (W, g')$ *conserva il prodotto scalare* o che è una *trasformazione ortogonale* oppure è un'*isometria lineare* o semplicemente *isometria* se

$$g(u, v) = g'(F(u), F(v)) \tag{1}$$

per ogni $u, v \in V$.

Teorema 4.2 *Siano (V, g) e (W, g') spazi vettoriali Euclidei della stessa dimensione $n \geq 1$. Sia $F : V \to W$ un'applicazione che conserva il prodotto scalare.*

Allora F è lineare ed è un isomorfismo. Inoltre F^{-1} conserva anch'essa il prodotto scalare.

Dimostrazione: Fissiamo una base ortonormale $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V; poichè F conserva il prodotto scalare, abbiamo

$$g'(F(v_i), F(v_j)) = g(v_i, v_j) = \delta^i_j.$$

Ciò comporta che anche $\mathfrak{B}' = \{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ è un sistema ortonormale, e quindi un base ortomormale di W. Dati ora $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$, risulta per ogni $i = 1, \ldots, n$:

$$g'(F(\lambda u + \mu v), F(v_i)) = g(\lambda u + \mu v, v_i) = \lambda g(u, v_i) + \mu g(v, v_i) =$$

$$= \lambda g'(F(u), F(v_i)) + \mu g'(F(v), F(v_i)) = g'(\lambda F(u) + \mu F(v), F(v_i))$$

dove abbiamo ancora sfruttato l'ipotesi su F. Da ciò segue che

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v),$$

ovvero resta provato che F è lineare.

Sia $v \in Ker(f)$; allora $g(v, v) = g'(F(v), F(v)) = 0$, da cui $v = 0$. Dunque F è un monomorfismo, e ciò basta per poter affermare che è un isomorfismo.

Riguardo l'ultima affermazione, la (1) si può riscrivere

$$g'(F(u), F(v)) = g(F^{-1}(F(u)), F^{-1}(F(v)))$$

e, poichè ogni vettore di W, stante la surgettività di F, è del tipo $F(u)$ per un certo $u \in V$, abbiamo che anche F^{-1} conserva il prodotto scalare. $\square$

Valgono le seguenti caratterizzazioni:

Teorema 4.3 *Sia $F : (V, g) \to (W, g')$ un'applicazione. Allora sono equivalenti:*

a) F è un'isometria lineare.

b) F è lineare e per ogni $v \in V$ si ha $||v|| = ||F(v)||$.

c) $F(0) = 0$ e $||u - v|| = ||F(u) - F(v)||$ per ogni $u, v \in V$.

Dimostrazione: La validità dell'implicazione $a) \Rightarrow b)$ è un'immediata applicazione del Teorema precedente, mentre $b) \Rightarrow c)$ è di semplice verifica. Riguardo $c) \Rightarrow a)$, abbiamo, assumendo $c)$, e applicandola nel caso $v = 0$, che per ogni $u \in V$, $||u|| = ||F(u)||$. Dati ora due vettori arbitrari $u, v \in V$, per ipotesi:

$$||u - v||^2 = ||F(u) - F(v)||^2,$$

da cui

$$||u||^2 + ||v||^2 - 2g(u, v) = ||F(u)||^2 + ||F(v)||^2 - 2g'(F(u), F(v))$$

e quindi, per quanto appena stabilito:

$$g(u, v) = g'(F(u), F(v)).$$

Pertanto F conserva il prodotto scalare. $\square$

Abbiamo anche

Teorema 4.4 *Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale di V. Sono equivalenti:*

a) F è un'isometria.

b) $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ è base ortonormale di W.

Dimostrazione: L'unica implicazione non immediata è $b) \Rightarrow a)$. Si osservi che affinchè un'applicazione *lineare* $F : V \to W$ conservi il prodotto scalare è sufficiente che

$$g(v_i, v_j) = g'(F(v_i), F(v_j)) \tag{2}$$

per ogni i, j, essendo $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base fissata (non necessariamente ortonormale) di V.

Ciò perchè, assumendo che F sia lineare, l'applicazione

$$V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto g'(F(u), F(v))$$

è una *forma bilineare* simmetrica, e la condizione (2) è necessaria e sufficiente affinchè essa coincida con g.

Ciò premesso, nell'ipotesi $b)$ la (2) è chiaramente soddisfatta in corrispondenza della base ortonormale $\mathfrak{B}$, in quanto ambo i membri coincidono con δ^i_j. $\square$

Esempio 4.5 Ogni base ortonormale $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale Euclideo determina un'isometria

$$F_{\mathfrak{B}} : V \to \mathbb{R}^n$$

tra (V, g) e $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, dove $\cdot$ è il prodotto scalare standard.

Si tratta dell'isomorfismo che trasforma ordinatamente i vettori v_i nei vettori della base canonica e_i. Esso è un'isometria, in forza della caratterizzazione provata nel Teorema precedente, perchè la base canonica è ortonormale.

Ricordiamo che $F_{\mathfrak{B}}$ opera esplicitamente come:

$$F_{\mathfrak{B}}(v) = x$$

dove, per ogni $v \in V$, x denota il vettore delle componenti di v rispetto alla base $\mathfrak{B}$.

In effetti, il fatto che $F_{\mathfrak{B}}$ è un'isometria si può anche agevolmente verificare direttamente: per ogni $u = \sum x_i v_i$ e $v = \sum y_i v_i$ risulta infatti

$$g(u, v) = \sum x_i y_i = x \cdot y = F_{\mathfrak{B}}(u) \cdot F_{\mathfrak{B}}(v).$$

In sintesi, possiamo affermare che *ogni spazio vettoriale Euclideo n-dimensionale è isometrico a* $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

Un'altra importante caratterizzazione delle isometrie si ha in termini di matrici. Diamo a questo scopo la seguente:

Definizione 4.6 Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice *ortogonale* se

$$^tAA = I_n.$$

Per definizione I_n è ortogonale.

Teorema 4.7 *Le matrici ortogonali di ordine n costituiscono un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$, denotato con $O(n)$. Inoltre per ogni $A \in O(n)$, si ha* $\det(A) = 1$ *oppure* $\det(A) = -1$.

La dimostrazione è un esercizio. Si noti che, se $A \in O(n)$, allora $\det(A)^2 = 1$ per il Teorema di Binet. Da qui segue che A è invertibile, e che $A^{-1} = A^t$. In particolare, ciò garantisce che $A^tA = I_n$ e quindi anche che $^tA \in O(n)$.

Osserviamo anche che il sottoinsieme di $O(n)$ costituito dalle matrici ortogonali con determinante 1 è un sottogruppo di $O(n)$. Esso si denota con $SO(n)$.

Nel seguito, per ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, denoteremo con $A^{(i)}$ le righe di A e con $A_{(j)}$ le sue colonne. Date $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, notiamo che l'elemento di posto (i, j) della matrice prodotto AB concide con il prodotto scalare standard

$$A^{(i)} \cdot B_{(j)}$$

tra la i-ma riga di A e la j-ma colonna di B, entrambi pensati come vettori di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 4.8 *Per ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, le proprietà seguenti sono equivalenti:*
a) A è ortogonale.
b) Le colonne $A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}$ costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
c) Le righe $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Basta provare che $a)$ e $b)$ sono equivalenti, perchè A è ortogonale se e solo se lo è la trasposta ^tA. Abbiamo che

$$^tAA = I_n$$

se e solo se per ogni i, j si ha:

$$(^tA)^{(i)} \cdot A_{(j)} = \delta^i_j$$

ovvero

$$A_{(i)} \cdot A_{(j)} = \delta^i_j. \ \square$$

Teorema 4.9 *Sia $F : (V, g) \to (W, g')$ un'applicazione lineare. Siano $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ due basi ortonormali rispettivamente di V e di W e sia A la matrice associata a F rispetto a tali basi. Allora:*

$$F \text{ è un'isometria} \iff A \in O(n).$$

Dimostrazione: Supposto che $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathfrak{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$, per costruzione la j-ma colonna di A è il vettore delle componenti di $F(v_j)$ rispetto alla base $\mathfrak{B}'$; tale vettore è $F_{\mathfrak{B}'}(F(v_j))$, dove utilizziamo l'isometria

$$F_{\mathfrak{B}'} : W \to \mathbb{R}^n$$

determinata dalla base $\mathfrak{B}'$. Ora, risulta che F è un'isometria se e solo se se i vettori $F(v_i)$ costituiscono una base ortonormale di W, e ciò è vero (essendo sia $F_{\mathfrak{B}'}$ che la sua inversa isometrie) se e solo se i vettori $F_{\mathfrak{B}'}(F(v_i))$ costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, ovvero se e solo se $A \in O(n)$.$\square$

Corollario 4.10 *L'insieme $O(V, g)$ delle trasformazioni ortogonali $F : V \to V$ di uno spazio vettoriale Euclideo n-dimensionale in sè e un sottogruppo del gruppo $GL(V)$ degli automorfismi lineari di V, isomorfo a $O(n)$. Più precisamente, ogni base ortonormale $\mathfrak{B}$ determina un isomorfismo di gruppi:*

$$F \in O(V, g) \mapsto M_{\mathfrak{B}}(F) \in O(n).$$

Corollario 4.11 *Siano $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ due basi ortonormali di uno spazio vettoriale Euclideo V. Allora la matrice di passaggio M da $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}'$ è una matrice ortogonale.*

Infatti, basta osservare che M coincide con la matrice associata a $Id_V : V \to V$ rispetto alle basi $\mathfrak{B}'$ e $\mathfrak{B}$, e applicare il Teorema 4.9 a Id_V.

5 La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

In questo paragrafo approfondiamo alcune proprietà basilari dei prodotti scalari e della funzione norma.

Notiamo innanzitutto che, per ogni vettore v di di uno spazio vettoriale Euclideo (V, g), risulta

$$||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.1 *Siano v, w vettori arbitrari di uno spazio vettoriale Euclideo (V, g). Allora si ha*

$$g(v, w)^2 \leq ||v||^2 ||w||^2 \tag{3}$$

o equivalentemente:

$$|g(v,w)| \leq ||v|| ||w||. \tag{4}$$

Inoltre, la (3) *è un'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.*

DIMOSTRAZIONE: È sufficiente provare le seguenti affermazioni:

a) Se v e w sono linearmente indipendenti, allora vale la (3) come disuguaglianza stretta;

b) Se v e w sono linearmente dipendenti, allora sussiste la (3) vale come uguaglianza.

Da ciò infatti segue direttamente la validità di (3); riguardo l'ultima affermazione, se (3) è vera come uguaglianza, allora, in forza di a), necessariamente v e w devono essere linearmente dipendenti.

Per provare a), assumendo v e w linearmente indipendenti, consideriamo il sottospazio $U =< v, w >$ di V che ha dimensione 2; la matrice della restrizione $g|_{U\times U}$ di g a U rispetto alla base $\mathfrak{B} = \{v, w\}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} g(v,v) & g(v,w) \\ g(v,w) & g(w,w) \end{pmatrix}.$$

Siccome $g|_{U\times U}$ è definita positiva, il criterio di Sylvester garantisce che $\det(A) > 0$, da cui

$$g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2 > 0$$

e quindi sussiste la (3) come disuguaglianza stretta.

Riguardo b), supponiamo che v e w siano linearmente dipendenti. Allora deve aversi $v = \lambda w$ oppure $w = \lambda u$ per un opportuno scalare λ. Supponiamo ad esempio $v = \lambda w$; la dimostrazione procede allo stesso modo nell'altro caso. Risulta dunque:

$$g(v,w)^2 = \lambda^2 g(w,w)^2 = \lambda^2 ||w||^4 = \lambda^2 ||w||^2 ||w||^2 = ||v||^2 ||w||^2 . \square$$

Corollario 5.2 *(Disuguaglianza triangolare)*

Per ogni v, w vettori di (V, g) si ha:

$$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||. \tag{5}$$

Inoltre, la (5) *è un'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti e $g(v,w) \geq 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Poichè ambo i membri di (5) sono numeri non negativi, la stessa disuguaglianza è equivalente a

$$||v+w||^2 \leq (||v|| + ||w||)^2.$$

Per provarla, sfruttiamo la formula di polarizzazione per g:

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2g(v,w) \leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2||v||||w|| = (||v|| + ||w||)^2$$

dove si è applicata la (4). Infine, notiamo che la (5) è un'uguaglianza se e solo se

$$||v+w||^2 = (||v|| + ||w||)^2,$$

che si riscrive

$$g(v,w) = ||v||||w||.$$

In forza del Teorema precedente, questa uguaglianza sussiste se e solo se v e w sono linearmente dipendenti e $g(v,w) \geq 0$. $\square$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz permette di introdurre in modo analitico la nozione di angolo tra vettori:

Definizione 5.3 Siano v e w vettori non nulli di uno spazio vettoriale Euclideo (V,g). Si chiama **angolo convesso** tra v e w l'unico scalare $\theta \in [0,\pi]$ tale che:

$$\cos\theta = \frac{g(v,w)}{||v||||w||}.$$

Tale definizione ha senso perchè, in virtù di (4), abbiamo $-1 \leq \frac{g(v,w)}{||v||||w||} \leq 1$, e la funzione $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ è bigettiva.

Notiamo ad esempio che v e w sono ortogonali tra loro se e solo se $\pi = \frac{\pi}{2}$; inoltre, per ogni scalare non nullo $\lambda \in \mathbb{R}$, l'angolo θ tra v e λv è $\theta = 0$ se e solo se $\lambda > 0$, mentre $\theta = \pi$ se e solo se $\lambda < 0$.

6 Il prodotto vettoriale

In questo paragrafo $(V, <, >)$ denota uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione 3.

Fissiamo una base ortonormale $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ di V.

Definizione 6.1 Siano u e v vettori di V; si chiama **prodotto vettoriale** $u \times v$, rispetto alla base $\mathfrak{B}$, l'unico vettore di V tale che, per ogni $w \in V$:

$$< u \times v, w >= \det(x\ y\ z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

essendo $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ i vettori delle componenti di u, v e w rispetto a $\mathfrak{B}$.

Il vettore $u \times v$ è dunque assegnato prescrivendone il prodotto scalare con qualsiasi altro vettore w. Per giustificare che tale definizione è posta, teniamo conto dell'isomorfismo canonico

$$\delta : V \to V^*$$

associato al prodotto scalare: ogni funzionale $\varphi : V \to \mathbb{R}$ si può scrivere nella forma

$$\varphi(w) =< v, w >$$

essendo $v \in V$ un vettore univocamente determinato. Nel nostro caso, fissati i due vettori u e v, il funzionale è:

$$\varphi(w) := \det(x\ y\ z) = \det(F_{\mathfrak{B}}(u)\ F_{\mathfrak{B}}(v)\ F_{\mathfrak{B}}(w)),$$

e stiamo denotando con $u \times v$ il vettore che è univocamente determinato in corrispondenza di tale φ. Ricordiamo che $F_{\mathfrak{B}} : V \to \mathbb{R}^3$ è l'isometria lineare determinata dalla base $\mathfrak{B}$. Risulta che φ è un'applicazione lineare per la proprietà di multilinearità del determinante rispetto alle colonne:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda w_1 + \mu w_2) &= \det(F_{\mathfrak{B}}(u)\ F_{\mathfrak{B}}(v)\ F_{\mathfrak{B}}(\lambda w_1 + \mu w_2)) = \\ &= \det(F_{\mathfrak{B}}(u)\ \ F_{\mathfrak{B}}(v)\ \ \lambda F_{\mathfrak{B}}(w_1) + \mu F_{\mathfrak{B}}(w_2)) = \\ &= \lambda \det(F_{\mathfrak{B}}(u)\ F_{\mathfrak{B}}(v)\ F_{\mathfrak{B}}(w_1)) + \mu \det(F_{\mathfrak{B}}(u)\ F_{\mathfrak{B}}(v)\ F_{\mathfrak{B}}(w_2)) = \\ &= \lambda\varphi(w_1) + \mu\varphi(w_2). \end{aligned}$$

Un modo più esplicito per calcolare $u \times v$ è fornito dalla seguente:

Proposizione 6.2 *Il prodotto $u \times v$ di due vettori di componenti x e y rispetto alla base $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ coincide con il vettore*

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} := (x_2y_3 - x_3y_2)i - (x_1y_3 - x_3y_1)j + (x_1y_2 - x_2y_1)k.$$

Per verificare ciò è sufficiente calcolare le componenti $< u \times v, i >$, $< u \times v, j >$ e $< u \times v, k >$ di $u \times v$; in base alla definizione di $u \times v$ e alla (6), abbiamo ad esempio:

$$< u \times v,\ i >= \det(x\ y\ e_1) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = x_2y_3 - x_3y_2.$$

Teorema 6.3 *L'operazione $\times : V \times V \to V$ di prodotto vettoriale definita da una fissata base ortonormale $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ ha le seguenti proprietà:*

1. *$\times$ è un'applicazione bilineare antisimmetrica ($u \times v = -v \times u$ per ogni u, v);*
2. *$u \times v$ è ortogonale sia ad u che a v;*
3. $< u \times v, a \times b >= \begin{vmatrix} < u, a > & < v, a > \\ < u, b > & < v, b > \end{vmatrix}$;
4. $||u \times v||^2 = ||u||^2||v||^2 - < u, v >^2$;
5. *$u \times v = 0$ se e solo se u e v sono linearmente dipendenti;*
6. *Se u e v sono non nulli, $||u \times v|| = ||u||||v|| \sin\theta$, dove θ è l'angolo formato da u e v.*
7. *Se u e v sono linearmente indipendenti, allora $\{u, v, u \times v\}$ è una base concordemente orientata con $\mathfrak{B}$.*

Dimostrazione: 1) Abbiamo intanto che $u \times v = -v \times u$ come conseguenza del fatto che, scambiando tra loro le prime due colonne x e y, il determinante nella (6) cambia segno. La bilinearità $\times$ segue parimenti dalla multilinearità del determinante: abbiamo infatti, per ogni $w \in V$:

$$\begin{aligned} < (\lambda u + \mu u') \times v, w > &= \det(F_{\mathfrak{B}}(\lambda u + \mu u')\ F_{\mathfrak{B}}(v)\ F_{\mathfrak{B}}(w)) \\ &= \lambda \det(F_{\mathfrak{B}}(u)\ F_{\mathfrak{B}}(v)\ F_{\mathfrak{B}}(w)) + \mu \det(F_{\mathfrak{B}}(u')\ F_{\mathfrak{B}}(v)\ F_{\mathfrak{B}}(w)) \\ &= \lambda < u \times v, w > + \mu < u' \times v, w > \\ &= < \lambda\, u \times v + \mu\, u' \times v, w >, \end{aligned}$$

e ciò prova che $(\lambda u + \mu u') \times v = \lambda\, u \times v + \mu\, u' \times v$.

2) Segue ancora dalla (6) e dal fatto che ogni matrice quadrata con due colonne uguali ha determinante nullo.

3) Fissati i vettori u e v, notiamo che le funzioni $b : V \times V \to \mathbb{R}$ e $b' : V \times V \to \mathbb{R}$ definite da

$$b(a,b) :=< u \times v, a \times b >, \ b'(a,b) := \begin{vmatrix} < u,a > & < v,a > \\ < u,b > & < v,b > \end{vmatrix}$$

sono entrambe bilineari e antisimmetriche. Quindi per stabilire che $b = b'$ è sufficiente controllare che valgano le seguenti relazioni:

$$b(i,j) = b'(i,j), \ b(i,k) = b'(i,k), \ b(j,k) = b'(j,k).$$

Queste sono di verifica immediata: ad esempio,

$$b(i,j) =< u \times v, i \times j >=< u \times v, k >= \begin{vmatrix} < u,i > & < v,i > & 0 \\ < u,j > & < v,j > & 0 \\ < u,k > & < v,k > & 1 \end{vmatrix} = b'(i,j).$$

4) è un caso particolare di 3), mentre 5) segue dal teorema sulla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, e 6) segue subito dalla definizione di $\cos\theta$, ricordando che $\theta \in [0, \pi]$. Infine, riguardo 7), se u e v sono indipendenti, allora $\{u, v, u \times v\}$ è una base, in quanto il vettore $u \times v$ è non nullo e appartiene al complemento ortogonale del sottospazio generato da u e v. Il determinante della matrice di passaggio da $\mathfrak{B}$ a tale base è

$$\det(F_{\mathcal{B}}(u) \ F_{\mathcal{B}}(v) \ F_{\mathcal{B}}(u \times v)) =< u \times v, u \times v >$$

che è un numero strettamente positivo.□

Siamo ora in grado di confrontare le operazioni di prodotto vettoriale determinate da basi diverse.

Teorema 6.4 *Siano $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ due basi ortonormali di V. Si considerino le operazioni di prodotto vettoriale $\times_{\mathfrak{B}}$ e $\times'_{\mathfrak{B}}$ che esse determinano. Allora:*

a) $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ sono concordemente orientate $\iff$ $\times_{\mathfrak{B}} = \times_{\mathfrak{B}'}$.

b) $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ sono discordi $\iff$ $\times_{\mathfrak{B}} = - \times_{\mathfrak{B}'}$.

Dimostrazione: Basta provare le due implicazioni $\Rightarrow$ in a) e b). Notiamo preliminarmente che, per ogni coppia di vettori u e v si ha, in forza della proprietà 4) del Teorema precedente:

$$||u \times_{\mathfrak{B}} v|| = ||u \times'_{\mathfrak{B}} v||.$$

Inoltre, se u e v sono linearmente dipendenti, allora $u \times_{\mathfrak{B}} v = 0 = u \times'_{\mathfrak{B}} v$. Siano u e v vettori linearmente indipendenti. I vettori $u \times_{\mathfrak{B}} v$ e $u \times'_{\mathfrak{B}} v$ appartengono entrambi al sottospazio 1-dimensionale $< u, v >^{\perp}$, e pertanto sono linearmente dipendenti; poichè hanno la stessa norma deve aversi:

$$u \times_{\mathfrak{B}'} v = u \times_{\mathfrak{B}} v \text{ oppure } u \times_{\mathfrak{B}'} v = -u \times_{\mathfrak{B}} v.$$

Ora mostriamo che, se le due basi sono concordi, allora deve verificarsi sempre la prima eventualità, mentre se le basi sono discordi, è sempre vera la seconda.

Infatti, in base alla 7) del Teorema 6.3, sappiamo che le basi

$$\overline{\mathfrak{B}} := \{u, v, u \times_{\mathfrak{B}} v\}, \quad \overline{\mathfrak{B}'} := \{u, v, u \times'_{\mathfrak{B}} v\}$$

sono rispettivamente concordi con $\mathfrak{B}$ e con $\mathfrak{B}'$. Se queste ultime sono concordi, allora tutte le basi in questione lo sono. Non può essere quindi $u \times'_{\mathfrak{B}} v = -u \times_{\mathfrak{B}} v$, perchè altrimenti si avrebbe

$$\overline{\mathfrak{B}'} = \{u, v, -u \times_{\mathfrak{B}} v\},$$

ma tale base è discorde da $\overline{\mathfrak{B}}$. Invece nel caso in cui $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ sono discordi, tali sono $\overline{\mathfrak{B}}$ e $\overline{\mathfrak{B}'}$ e da ciò segue che non può essere $u \times'_{\mathfrak{B}} v = u \times_{\mathfrak{B}} v$, perchè altrimenti si avrebbe

$$\overline{\mathfrak{B}'} = \{u, v, u \times_{\mathfrak{B}} v\} = \overline{\mathfrak{B}},$$

il che è una contraddizione. $\square$

Possiamo concludere che ogni spazio vettoriale Euclideo tridimensionale $(V, <,>)$ ammette esattamente due operazioni di prodotto vettoriale, una opposta dell'altra, completamente determinate esclusivamente dalle due orientazioni dello spazio.

7 Forme bilineari simmetriche in spazi Euclidei

In questa sezione discutiamo due importanti applicazioni del Teorema spettrale riguardanti lo studio delle forme bilineari simmetriche.

Teorema 7.1 *Siano (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo e $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base ortonormale $\mathfrak{B}$ di V diagonalizzante per b.*

La dimostrazione è fondata sul fatto seguente: *assegnata una forma bilineare $b : V \times V \to \mathbb{R}$, esiste uno ed un solo endomorfismo*

$$F : V \to V$$

tale che

$$g(F(v), w) = b(v, w) \quad \forall v, w \in V. \tag{$*$}$$

Inoltre, se b è simmetrica, tale F è un endomorfismo simmetrico.

Infatti, riguardo l'unicità di tale endomorfismo, se F e G verificano entrambi tale proprietà, allora fissato $v \in V$, deve aversi

$$g(F(v), w) = b(v, w) = g(G(v), w)$$

per ogni $w \in V$, e ciò implica che $F(v) = G(v)$. Dunque $F = G$. Per quel che riguarda l'esistenza, consideriamo le applicazioni lineari

$$\delta_g : V \to V^*, \quad \delta_b : V \to V^*$$

canonicamente associate a g e a b ($\delta_b(v)(w) := b(v, w)$ e analogamente per g). Sappiamo che, siccome g è un prodotto scalare, δ_g è un isomorfismo. Poniamo allora

$$F := \delta_g^{-1} \circ \delta_b : V \to V.$$

Tale F è un'applicazione lineare, in quanto composizione di applicazioni lineari, e risulta, per ogni $v, w \in V$:

$$g(F(v), w) = \delta_g(F(v))(w) = (\delta_g \circ F)(v)(w) = \delta_b(v)(w) = b(v, w).$$

Chiaramente, se b è simmetrica, allora

$$g(F(v), w) = b(v, w) = b(w, v) = g(F(w), v) = g(v, F(w))$$

per cui anche F è simmetrico.

Oss: In effetti, utilizzando un fissato prodotto scalare g, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme di tutti gli endomorfismi $End(V)$ e lo spazio delle forme bilineari $Bil(V)$: essa è

$$F \mapsto b_F$$

dove $b_F : V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma bilineare definita ponendo

$$b_F(v, w) := g(F(v), w).$$

Tale applicazione è anzi un isomorfismo tra questi spazi vettoriali. Esso induce un isomorfismo tra lo spazio vettoriale degli endomorfismi simmetrici e lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche.

Dimostrazione del Teorema: Assegnata b, consideriamo l'endomorfismo simmetrico F che soddisfa (*). Per il Teorema Spettrale, esiste una base ortonormale

$\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, dove $n = \dim(V)$, costituita da autovettori di F, ovvero diagonalizzante per F. Ora, in base alla (*) abbiamo

$$b(v_i, v_j) = g(F(v_i), v_j) = g(F(v_j), v_i)$$

e ciò significa che l'elemento di posto (i, j) della matrice associata a b coincide con quello di ugual posto della matrice associata a F, ovvero

$$M_{\mathfrak{B}}(b) = M_{\mathfrak{B}}(F)$$

e quindi tale base ortonormale è diagonalizzante anche per b. $\square$

Utizzando questo risultato, possiamo ricavare anche un altro criterio per riconoscere quando una data forma bilineare simmetrica è un prodotto scalare, che si affianca al criterio di Sylvester già discusso:

Teorema 7.2 *Siano V uno spazio vettoriale reale e $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Siano $\mathfrak{B}$ una base di V e $A = M_{\mathfrak{B}}(b)$ la matrice associata a b rispetto a tale base. Allora:*

$$b \text{ è definita positiva} \iff \text{Tutti gli autovalori di } A \text{ sono strettamente positivi.}$$

Dimostrazione: Consideriamo l'unico prodotto scalare g su V rispetto al quale $\mathfrak{B}$ è un base ortonormale (ricordiamo che g si può definire esplicitamente ponendo $g(v, w) = {}^t xy$, dove x e y sono i vettori delle componenti di v e w rispetto alla base).

Applicando il Teorema precedente, possiamo procurarci un'altra base ortonormale $\mathfrak{B}'$ diagonalizzante per b; sia

$$D = M_{\mathfrak{B}'}(b) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

la corrispondente matrice diagonale. Poichè b è definita positiva se e solo se ha segnatura $(n, 0)$, abbiamo che ciò accade se e solo se tutti i λ_i sono numeri strettamente positivi. Per concludere, affermiamo che tali scalari sono in realtà sono anche gli autovalori di A (ripetuti in base alla rispettiva molteplicità). Infatti, detta M la matrice di passaggio da $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}'$, sappiamo che le matrici associate a b sono legate dalla relazione (congruenza):

$${}^t MAM = D;$$

d'altra parte M è una matrice ortogonale, perchè entrambe le basi coinvolte sono ortonormali. Ciò garantisce che ${}^t M = M^{-1}$, e quindi

$$M^{-1}AM = D,$$

ovvero A e D sono anche simili, e pertanto hanno gli stessi autovalori. $\square$