Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
8/1/2025

Esercizio 1. Si considerino l'applicazione lineare

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definita da

$$F(x, y, z) = (x - 2y + 5z, 3x + \frac{1}{2}y + 2z, 2x + \frac{1}{2}y + z)$$

ed i vettori $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 0, 0)$.

a) Verificare che $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare la matrice

$$M := M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}_o}(F)$$

associata a F rispetto alla base canonica $\mathfrak{B}_o$ ed alla base $\mathfrak{B}$.

b) Determinare la dimensione ed una base di $Im(F)$.

Esercizio 2. Si consideri il sottoinsieme $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \quad 3x - 2y + 5z - 2t = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Mostrare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

b) Determinare la dimensione di V e determinare una base $\mathfrak{B}$ di V contenente il vettore $v = (2, 3, 2, 5)$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verificare che la matrice A è diagonalizzabile e determinare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A.