

Prova scritta di **Geometria**

Cdl Fisica

6/11/2025

**Esercizio 1.** Si consideri l'endomorfismo lineare  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che:

$$F(1, 0, 0) = (1, -1, 0), F(1, 1, 0) = (1, 1, 3), F(1, 0, 1) = (1, 0, 0).$$

- a) Stabilire che  $F$  è un isomorfismo.
- b) Determinare la matrice  $M_{\mathfrak{B}_o}(F)$  associata a  $F$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
- c) Calcolare  $F^{-1}(0, 1, 0)$ .

**Esercizio 2.** Sono assegnati i seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^5$ :

$$V = L((0, \frac{1}{2}, 3, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 0)), W = L((3, 0, 2, 5, 2), (1, -1, -6, -1, 1), (0, 0, 0, 0, 1)).$$

Determinare una base di  $V \cap W$  ed una base di  $V + W$ .

**Esercizio 3.** Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} 3x + \frac{1}{2}y + (k^2 - 3)z + t = 5 \\ 2x + \frac{1}{4}y + (k^2 - 3)t = 3 \\ (k^2 - 3)x - z + t = k + 3 \end{cases}$$

nelle incognite  $(x, y, z, t)$ , dove  $k$  è un parametro.

Stabilire, senza esibire soluzioni, per quali valori di  $k$  il sistema è compatibile.