

Prova scritta di **Geometria**

Cdl Fisica

6/11/2024

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica \mathfrak{B}_0 di \mathbb{R}^3 e alla base $\mathfrak{B} = \{(0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ di \mathbb{R}^4 .

- a) Calcolare $F(1, 0, 1)$.
- b) Determinare la dimensione di $Im(F)$.
- c) Determinare una base di $Ker(F)$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 :

$$V = L((1, 2, 0, 4), (0, 1, 1, 0)), \quad W = L((4, 0, 0, -1), (0, 2, -2, -1)).$$

Stabilire se è vero che:

$$\mathbb{R}^4 = V \oplus W.$$

Esercizio. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} kx = 1 \\ kx + (1 - k)y = 1 \\ (1 - k)y = 0 \\ 2x - ky - 3z = -k \end{cases}$$

Si determini per quali valori di k il sistema è compatibile.