Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
5/11/2026

Esercizio 1. Si ponga

$$v_1 = (1, 0, 2),\ v_2 = (1, 0, -2),\ v_3 = (1, 1, 1).$$

a) Stabilire che $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Considerata l'applicazione lineare

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

tale che:

$$F(e_1) = v_2,\ F(e_2) = v_3,\ F(e_3) = v_1,\ F(e_4) = -4v_1 + v_2,$$

dove $\mathfrak{B}_o = \{e_i\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$, scrivere la matrice $M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}_o}(F)$ associata a F rispetto alle basi $\mathfrak{B}_o$ e $\mathfrak{B}$.

c) Stabilire se F è surgettiva e determinare una base di $Ker(F)$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L\left(\left(1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right), \left(1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}\right), \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right), \left(1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right)\right),$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - 2z + t = 0\}.$$

Determinare le dimensioni di U e di W ed una base di $U \cap W$.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo lineare

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definito da

$$F(x, y, z) = \big((2 - k)x + y + (k - 1)z,\ x + 2y - z,\ (1 - k)x + y + kz\big),$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

a) Determinare gli autovalori di F e stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo F è diagonalizzabile.

b) In corrispondenza dei valori di k per cui F è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F.