Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
30/6/2025

Esercizio 1. 1) Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(1, \sqrt{2}) = (1, 0, 0, 1), \quad F(\sqrt{2}, 1) = (0, 1, 1, 0)$$

Stablire inoltre se il vettore $v = (1, 1, 1, 0)$ appartiene a $Im(F)$.

2) Determinare la matrice A associata a F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^4$.

3) Determinare una base di $Ker(F)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^5$:

$$V = L((1, k, 0, k, 1), (1, -1, 0, -1, 1), (k, 0, 0, 0, 2), (4, 0, 0, 0, 2k)),$$

dove k è un parametro reale. Si calcoli la dimensione di V al variare di k.

Esercizio 3. Si condideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$F(x, y, z, t) = (2x, 2y, x - y + 3z, -x + 3t).$$

Stabilire se F è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base $\mathfrak{B}$ di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di F.