Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
29/1/2026

Esercizio 1. Si consideri l'applicazioni lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F(x, y, z, t) = (x + 2z + t, 3x + y + z - 2t, x + y + 2z + t).$$

1) Stabilire se F è surgettiva e/o ingettiva.

2) Determinare la matrice $A = M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}_o}(F)$ associata a F rispetto alla base canonica $\mathfrak{B}_o$ di $\mathbb{R}^4$ e alla base $\mathfrak{B} = \{(1, 3, 1), (0, 1, 1), (1, -2, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

3) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente una base di $Ker(F)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^5$:

$$V = L((0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}), (0, -3, -2, 0, -\frac{3}{2}), (k, 2, \frac{4}{3}, k, 1), (0, 1, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2})),$$

dove k è un parametro reale. Determinare una base di V al variare di k.

Esercizio 3. Si consideri uno spazio vettoriale reale V con base $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e l'endomorfismo $F : V \to V$ tale che:

$$F(v_1) = kv_2, \ F(v_2) = -kv_1, \ F(v_3) = v_1 + v_3,$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro. Stabilire per quali valori di k F è diagonalizzabile.
In corrispondenza di tali valori, determinare una base di V costituita da autovettori di F.