Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
26/6/2026

Esercizio 1. Si considerino le applicazioni lineari

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

tali che

$$M_{\mathfrak{B}_o}^{\mathfrak{B}'_o}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'_o}(G) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ k^2 - k & 0 & 0 \\ 5k + \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & k + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{B}'_o$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$, $\mathfrak{B}_o$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathfrak{B}$ denota la base $\{(0,1,1),(1,0,-1),(0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

a) Stabilire se F è ingettiva e/o surgettiva.

b) Stabilire per quali valori di k si ha $F = G$.

c) Stabilire per quali valori di k si ha $Ker(F) = Ker(G)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; x - 2y + z + t = 0\}.$$

Mostrare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinare una base di V contenente il vettore $(2, 1, 1, -1)$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 3y + z = 2, \\ 3x + 4y + 2z = k^2 - 2k + 3, \\ x + ky = 1, \end{cases}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

Stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, per quali valori il sistema è compatibile.