

Prova scritta di **Geometria**

Cdl Fisica

24/2/2026

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_o}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & k-7 \\ k+2 & \frac{3}{4} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale, $\mathfrak{B}$ denota la base $\{(1, -1, 0), (0, 1, 2), (1, 0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathfrak{B}_o$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

- 1) Stabilire per quali valori di k F è iniettiva.
- 2) Stabilire per quali valori di k si ha $(2, -7, -8) \in \text{Ker}(F)$.
- 3) Stabilire per quali valori di k si ha $(3, -8, 0, -1) \notin \text{Im}(F)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottoinsieme V di $\mathbb{R}^5$:

$$V = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : 4x + (h+1)y + 3t + w = 0, z + t + 2w = h+1\},$$

dove $h \in \mathbb{R}$.

Stabilire per quale valore di h risulta che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

In corrispondenza di tale valore, determinare una base di V ed un sottospazio W di $\mathbb{R}^5$ tale che:

$$\mathbb{R}^5 = V \oplus W.$$

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito da:

$$F(x, y, z, t) = (2x - 6y + 3z, -6x + 2y - 3z, -4z, 8t).$$

Stabilire se F è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ diagonalizzante per F .