

Prova scritta di **Geometria**

Cdl Fisica

24/1/2025

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$F(x, y, z, t) := ((k+3)x + z + 2t, 3x + ky + z + 2t, -3x + (k-1)z - 2t),$$

dove k è un parametro reale.

- a) Stabilire per quali valori di k F è iniettiva e per quali valori di k F è surgettiva.
- b) Nel caso $k = 0$ si determinino una base di $\text{Ker}(F)$ e una base di $\text{Im}(F)$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 :

$$V = L\left(\left(2, \frac{1}{3}, 2, -1\right), (0, 1, 3, 0)\right), \quad W = L\left((1, 3, 0, 1), (0, 6, -1, 3)\right).$$

Determinare una base di $V \cap W$ ed una base di $V + W$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ 4y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$$

- (a) Stabilire (senza esibire soluzioni) se il sistema è compatibile.
- (b) In caso affermativo, determinarne le soluzioni mediante riduzione ad un sistema di Cramer.