

Prova scritta di **Geometria**

Cdl Fisica

23/4/2025

Esercizio 1. Si considerino le applicazioni lineari

$$F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$$

tali che la matrice associata a F rispetto alle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre G è definita da $G(x, y, z) = (x + y, 0, 2z, 0, 3z)$.

- a) Determinare una base di $\text{Im}(F)$.
- b) Determinare la matrice associata a $F \circ G$ rispetto alle basi canoniche.
- c) Stabilire se $F \circ G$ è surgettiva e/o iniettiva.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali V e W di \mathbb{R}^4 :

$$V = \{(x, y, z, t) : x + 3y - 3z + t = 0\}, \quad W = L((1, 1, 1, 0), (1, 2, 2, -2), (1, 0, 0, 1)).$$

Determinare la dimensione di $V + W$ ed una base di $V \cap W$.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} kx + 2y + 6z = k \\ (k - 3)x = 0 \\ (k - 3)x - kz = 2 \\ kz = -2 \end{cases}$$

Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile.