

Prova scritta di **Geometria**

Cdl Fisica

23/4/2024

Esercizio 1. Si considerino le applicazioni lineari

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

dove

$$F(x, y, z) = (x + 3y - z, -x + 2z, 3y + z, 0)$$

mentre G è associata alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche. Determinare una base di $\text{Im}(F)$ e stabilire se l'applicazione lineare $F - 2G$ è iniettiva.

Esercizio 2. Considerati gli insiemi

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y = 5\}, \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y = 0\},$$

mostrare che uno dei due è sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 mentre l'altro non lo è.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile e determinare una base di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di A .