Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
17/9/2024

Esercizio 1. Si considerino le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, tali che la matrice associata a F rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale, mentre G soddisfa:

$$G(1,1,1,1) = (-2,4,2),\ G(0,0,1,1) = (-2,0,0),$$

$$G(0,0,1,-1) = (-2,0,-1),\ G(2,0,0,0) = (0,2,0).$$

a) Giustificare l'esistenza dell'applicazione lineare G.

b) Stabilire per quali valori di k si ha che $F = G$.

c) Determinare la dimensione di $Ker(F)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale V di $M_{2,3}(\mathbb{R})$:

$$V = L\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

Determinare la dimensione di V.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1-k & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A é diagonalizzabile.

(b) Posto $k = 3$, si determini una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.