

Prova scritta di **Geometria**

Cdl Fisica

17/7/2025

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica \mathfrak{B}_o di \mathbb{R}^4 e alla base $\mathfrak{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ di \mathbb{R}^3 .

- 1) Calcolare $F(1, -1, 0, 1)$.
- 2) Stabilire se F è surgettivo.
- 3) Determinare una base di $\text{Ker}(F)$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali V e W di \mathbb{R}^4 :

$$V = L\left(\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(5, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 1\right)\right),$$

$$W = L\left(\left(0, 0, 0, 1\right), \left(6, 3, 2, -1\right), \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{7}\right)\right).$$

Determinare le dimensioni di V e di W ed una base di $V \cap W$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z + 3t = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y - 2z + 9t = 6. \end{cases}$$

- (a) Stabilire, senza esibire soluzioni, se il sistema è compatibile.
- (b) In caso affermativo, determinare esplicitamente le soluzioni mediante riduzione ad un sistema di Cramer.