Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
15/1/2026

Esercizio 1. Si considerino le aplicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tali che

$$F(1,0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -2, \frac{k}{2}),\ F(0,0,1) = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -2, -\frac{k}{2}),\ F(0,1,1) = (-\frac{1}{2}, 3, -\frac{7}{3}, -\frac{k}{2}),$$

dove $k \in \mathbb{R}$ e la matrice associata a G rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Determinare una base di $Im(G)$.
2) Verificare che $Ker(F) = Ker(G)$.
3) Stabilire per quali valori di k si ha $F = G$.

Esercizio 2. Sono assegnati i seguenti sottospazi vettoriali V e W di $\mathbb{R}^4$:

$V = L((1,0,2,1),(0,1,1,2)), \quad W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ 3x+3y-z-w = 0,\ x-y+z-w = 0\}$.

Si determinino una base $\mathfrak{B}$ di $V \cap W$ ed una base $\mathfrak{B}'$ di $V + W$ contenente $\mathfrak{B}$.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$F(x,y,z,t) = (3x - 2z,\ y,\ x, (1-k)y + kt),$$

dove k è un parametro reale. Verificare che F è sempre diagonalizzabile e determinare, nel caso $k = 1$, una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di F.