Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
13/6/2025

Esercizio 1. 1) Posto $\mathfrak{B} = \{(1,1,1), (0,-1,0), (3,1,-3)\}$, verificare che $\mathfrak{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

2) Si considerino le applicazioni lineari

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

tali che:

$$M^{\mathfrak{B}_o}_{\mathfrak{B}_o}(F) = A, \quad M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}_o}(G) = A,$$

dove $\mathfrak{B}_o$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e A è la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $F(0,1,0,\frac{1}{5})$ e $G(0,1,0,\frac{1}{5})$.

3) Determinare la dimensione ed una base di $Ker(F)$ e stabilire se G è surgettivo.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$:

$$V = L((0,0,1,1), (0,1/2,1,1/2), (0,3,14,11), (0,1,3,2)).$$

Determinare la dimensione ed una base $\mathfrak{B}$ di V.

Dato poi il sottospazio $W = \{(x,y,z,t) : x+y+z+t = 0\}$, stabilire se è vero che

$$\mathbb{R}^4 = V \oplus W.$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ k^2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Si studi la diagonalizzabilità di A al variare del parametro k.