Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
12/6/2026

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

associata, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e alla base $\mathfrak{B} = \{(2,1,0),(2,-1,0),(0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 2 & 1/2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire se F è ingettiva e/o surgettiva.

b) Calcolare $F(0,1,1,0)$ e stabilire se $(3,-1,1) \in Im(F)$.

c) Determinare una base di $Ker(F)$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$V = \{(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5 \colon\ x+y+z+t = 0,\ 2x+w = 0\}, W = L((0,1,1,0,3),(1,0,2,-1,1),(1,2,-1,0,1)).$

Determinare le dimensioni di $V \cap W$ e di $V + W$ ed una base di $V + W$.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo lineare $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x,y,z) = (x + y + kz,\ 2y + kz,\ 2z),$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

a) Determinare gli autovalori di F e stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo F è diagonalizzabile.

b) In corrispondenza dei valori di k per cui F è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per F e scrivere la corrispondente matrice diagonale associata a F.