Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
11/9/2025

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \frac{k}{4} - \frac{k^2}{4} \\ 1 & 2 & 0 & k - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, essendo k un parametro reale.

1) Stabilire per quali valori di k F è surgettiva e per quali valori di k F è ingettiva.

3) Nel caso $k = \frac{1}{2}$, determinare una base di $Ker(F)$ ed una base di $Im(F)$.

3) Nel caso $k = 0$, si determini $\lambda \in \mathbb{R}$ affinchè la matrice seguente:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & -3 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 5 & \lambda & -4 \end{pmatrix}$$

sia la matrice associata a F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e alla base $\mathfrak{B} = \{(0, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^5$:

$$V = L((0, 1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 3, 0, 1, 1), (0, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})).$$

1) Determinare la dimensione di V ed una sua base.
2) Determinare un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^5$ tale che $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$F(x, y, z) := (5x - 4y, 8x - 7y, 8x - 4y - 3z).$$

Stabilire se F è diagonalizzabile.