Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
11/7/2024

Esercizio 1. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$F(1,1,2) = (0,k,1), \quad F(1,2,0) = (0,1,k), \quad F(0,1,0) = (1,1,0)$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

a) Stabilire per quali valori di k si ha che F è un isomorfismo.
b) Stabilire per quali valori di k si ha $(3,2,-1) \in Im(F)$.
c) Posto $k = 1$, stabilire se $(0,-1,2) \in Ker(F)$.

Esercizio 2. Sono assegnati i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$ e $v_2 = (2,-3,0,0)$ di $\mathbb{R}^4$.

1) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente v_1 e v_2.
2) Determinare una base del sottospazio $L(v_1, v_2) \cap W$, dove

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \; x + y - t = 0\}.$$

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x - y = 4 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

(a) Stabilire (senza esibire soluzioni) se il sistema è compatibile.

(b) In caso affermativo, determinarne le soluzioni mediante riduzione ad un sistema di Cramer.