Prova scritta di **Geometria**
Cdl Fisica
11/2/2026

Esercizio 1. Si considerino le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tali che la matrice associata a F rispetto alle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 8 & -9 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

e

$$G(1,1,0) = (0,0,0,0),\ G(0,1,1) = (\frac{1}{2},0,0,0),\ G(1,0,0) = (0,0,0,\frac{1}{3}).$$

1) Determinare una base di $Im(F)$.

2) Calcolare $G(0,0,\frac{1}{3})$.

3) Stabilire se $G \circ F$ è un isomorfismo.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali V e W di $\mathbb{R}^4$:

$$V = L((1,0,0,0),(0,1,0,-\frac{1}{2}),(0,0,1,-1)), \quad W = L((1,0,-2,0),(0,1,2,0),(0,0,0,1)).$$

Determinare una base di $V \cap W$ e la dimensione di $V + W$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti reali:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = k \\ 3x + 4y + 2z = 5 \\ \frac{1}{3}x + y - \frac{1}{3}z = 0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

a) Stabilire, senza esibire soluzioni, per quali valori reali di k il sistema è compatibile.

b) Per i valori di k per cui il sistema è compatibile, determinare l'insieme di tutte le soluzioni mediante riduzione a un sistema di Cramer.