

Prova scritta di **Geometria**

Cdl Fisica

10/7/2026

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare

$$F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

tale che

$$F(0, 1, 0, 1) = (1, 0, k, 0), F(0, 1, 0, -1) = (0, 1, -k, 0), F(0, 0, 1, 1) = (1, 2, 0, 1), F(1, 0, 0, 2) = (1, 0, 0, 0),$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

- a) Giustificare l'esistenza di F .
- b) Stabilire per quali valori di k F è un isomorfismo e determinare una base di $Im(F)$ al variare di k .
- c) Stabilire per quali valori di k si ha $(1, -1, 0, 1) \in Ker(F)$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}), (1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}), (3, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0)), W = L((1, 0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}), (0, 2, 4, -1)).$$

Determinare la dimensione di U ed una base di $U \cap W$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale con base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo lineare $F_k : V \rightarrow V$ definito sui vettori della base da

$$F_k(v_1) = v_1, \quad F_k(v_2) = kv_1 + v_2,$$

$$F_k(v_3) = v_4, \quad F_k(v_4) = -6v_3 + 5v_4.$$

- a) Determinare la matrice $A_k = M_{\mathcal{B}}(F)$ associata a F_k rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- b) Determinare gli autovalori di F_k e studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, per quali valori di k l'endomorfismo F_k è diagonalizzabile.