UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI
Dottorato di Ricerca in Matematica
XV Ciclo – A.A. 2002–2003

Tesi di Dottorato

Problemi non lineari critici per alcune classi di operatori subellittici

Presentata da Annunziata LOIUDICE

Supervisore della tesi:
Prof. Enrico JANNELLI

Coordinatore del Dottorato di Ricerca:
Prof. Francesco ALTOMARE

Alla mia famiglia

Prefazione

Oggetto di questa tesi è lo studio di alcuni problemi nonlineari "critici" nel senso delle immersioni di Sobolev per particolari classi di operatori subellittici.

In questo speciale contesto, si sono affrontati principalmente i due seguenti temi:

1. *la presenza di eventuali* termini di resto *nelle disuguaglianze di immersione di tipo Sobolev relative ad imbedding non compatti*;
2. *il fenomeno delle* dimensioni critiche *alla Brezis-Nirenberg.*

Si è indagato in particolare il ruolo assunto nei problemi di cui sopra dalla soluzione fondamentale dell'operatore subellittico coinvolto.

La principale classe di operatori da noi considerata è costituita dai cosiddetti *Sublaplaciani* su Gruppi di Carnot. Lo studio di questi operatori, che intervengono in svariati campi della geometria e dell'analisi, ha ricevuto grande impulso nell'ultimo decennio e riveste oggi sempre maggiore interesse.

A conclusione di questo ciclo di studi, desidero innanzitutto ringraziare il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna e la sua Scuola di Dottorato, per avermi più volte ospitata in questi anni, consentendomi preziosi approfondimenti legati alle mie ricerche.

Rivolgo un ringraziamento particolare al Prof. Ermanno Lanconelli, per la sua squisita disponibilità, i suoi insegnamenti e l'interesse mostrato per questo lavoro.

Desidero, infine, esprimere la mia più sentita gratitudine al Prof. Enrico Jannelli, relatore di questa tesi, per avermi seguita e sostenuta durante tutti questi anni, infondendomi costantemente entusiasmo ed interesse.

Bari, Novembre 2003

Annunziata Loiudice

Indice

Introduzione

Oggetto di questa tesi è lo studio di alcuni problemi legati a fenomeni di esponente critico per alcune classi di operatori subellittici. Particolare attenzione viene rivolta in questa analisi al ruolo assunto dalla soluzione fondamentale degli operatori coinvolti.
Cominciamo, innanzitutto, col tracciare un quadro dei risultati noti nel contesto ellittico dai quali trae origine la nostra ricerca.

Nel celebre lavoro [7] del 1983, Brezis e Nirenberg studiavano il problema semilineare critico:

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{2^*-1} + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u &> 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

ove Ω è un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ è l'esponente critico per l'embedding di Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p$. Essi mettevano in evidenza un interessante fenomeno: le condizioni per l'esistenza di soluzioni del problema (1) risultano sorprendentemente differenti quando $N = 3$ e quando, invece, $N \geq 4$. Infatti, valgono i seguenti risultati:
Teorema A *Se $N \geq 4$, allora il problema (1) ha almeno una soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$ per $0 < \lambda < \lambda_1$.*
Teorema B *Se $N = 3$, il problema (1) ha almeno una soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$ per $\lambda_* < \lambda < \lambda_1$, dove λ_* è un opportuno numero positivo; inoltre, se Ω è strettamente stellato, esiste $\lambda_{**} > 0$ tale che il problema non ammette soluzione per $0 < \lambda < \lambda_{**}$.*
Teorema C *Se $N = 3$ e Ω è una sfera, allora $\lambda_* = \frac{1}{4}\lambda_1$ e il problema non ha soluzione per $\lambda \leq \lambda_*$.*
Teorema D *Se $N = 3$, esiste una costante $C = C(\Omega)$ tale che la disuguaglianza di Sobolev può essere migliorata come segue:*

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq S\|u\|_6^2 + C\|u\|_2^2 \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega) \tag{2}$$

dove S è la miglior costante per l'immersione di Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$.

Questi risultati mostrano che la dimensione $N = 3$ gioca un ruolo particolare per il problema (1). Infatti, se $N \geq 4$ il problema ha soluzione per ogni $\lambda \in (0, \lambda_1)$, mentre per $N = 3$ esistono domini di $\mathbb{R}^3$ per i quali il problema non ha soluzione per λ in un opportuno intorno destro di 0. Secondo una terminologia ormai consolidata, questo fatto si esprime dicendo che $N = 3$ è una *dimensione critica* per il problema (1).
Infine, il Teorema D rivela un altro interessante fenomeno. Esso stabilisce che la classica disuguaglianza di Sobolev con costante ottimale S può essere "migliorata" su aperti limitati in dimensione 3; inoltre, come conseguenza del Teorema A, non è difficile provare che la (2) non vale per $N \geq 4$, quindi la dimensione 3 gioca nuovamente un ruolo speciale.
A partire dal lavoro [7], i Teoremi A, B, C da una parte, e il Teorema D dall'altra, sono stati oggetto di numerose generalizzazioni.
Per quanto riguarda il problema delle dimensioni critiche, esso è stato affrontato in svariati contesti ellittici: si veda ad esempio [46], [13], [31]. Per quanto riguarda il Teorema D, esso è stato, innanzitutto, perfezionato mediante l'uso delle norme deboli ed esteso a tutte le dimensioni da Brezis e Lieb [6] nel seguente modo:

Teorema D1 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato, esiste una costante $C = C(\Omega) > 0$ tale che*

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq S\|u\|_{2^*}^2 + C\|u\|_{\frac{N}{N-2},w}^2 \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$$

ove $\|\cdot\|_{q,w}$ denota la norma L^q-debole.

Il teorema precedente è stato, poi, doppiamente generalizzato. Da una parte, l'esponente di sommabilità 2 è stato sostituito da $1 < p < N$; dall'altra, sono stati considerati spazi di Sobolev di ordine k. Le disuguaglianze, dovute rispettivamente a Egnell-Pacella-Tricarico [14] e a Gazzola-Gruneau [28], sono le seguenti:

$$\|\nabla u\|_p^p \geq S_p\|u\|_{p^*}^p + C\|u\|_q^p, \ \forall q : 0 < q < \frac{N(p-1)}{N-p} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega);$$

$$\|u\|_{H_0^k}^2 \geq S\|u\|_{k^*}^2 + C\|u\|_{\frac{N}{N-2k},w}^2 \quad \forall\, u \in H_0^k(\Omega).$$

Le disuguaglianze precedenti hanno in comune alcune caratteristiche. Esse possono essere riscritte come segue

$$J(u) \geq S|u|_*^p + C(\Omega)\|u\|^p$$

ove p è l'esponente di sommabilità dello spazio di Sobolev $W_0^p(\Omega)$, $J(u)$ è il funzionale p-omogeneo della norma delle derivate, $|u|_*$ è la norma nello spazio L^{q^*} dove l'embedding di Sobolev è continuo ma non compatto, $C(\Omega)$ è una costante positiva, $C(t\Omega) \to 0$ per $t \to \infty$, ed infine, $\|u\|$ è una norma L^r (forte o debole), con $r < q^*$.

Un'analisi attenta dei risultati presenti in letteratura riguardo alle problematiche sopra richiamate ha portato in [31] e [32] alla formulazione di due principi unificanti, che interpretano il fenomeno delle dimensioni critiche e la presenza di termini di resto nella disuguaglianza di immersione di Sobolev alla luce delle proprietà di sommabilità della soluzione fondamentale dell'operatore ellittico coinvolto. I due principi sono i seguenti:

Principio 1 *Un operatore ellittico L si comporta "criticamente" in dimensione N se e solo se L ha almeno una funzione di Green $G(x_0, x)$ nello spazio $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Principio 2 *La disuguaglianza di Sobolev*

$$J(u) \geq S|u|_*^p$$

può essere migliorata aggiungendo ogni norma che sia localmente finita per la soluzione fondamentale dell'operatore associato.

Dunque, combinando i principi 1 e 2, si deduce che un operatore lineare ellittico L si comporta *criticamente* se e solo se la disuguaglianza di Sobolev associata ammette la norma L^2 come termine di resto.

In questo quadro di risultati si innesta la nostra ricerca.
Il nostro obiettivo è stato quello di indagare la validità dei principi sopra enunciati in un contesto completamente differente, non ellittico bensì *subellittico*. Ricordiamo che un operatore differenziale L del secondo ordine formalmente autoaggiunto si dice *subellittico di ordine* ε $(0 < \varepsilon < 1)$ nel punto $x \in \mathbb{R}^N$ se esiste un intorno V di x e una costante $C > 0$ tale che, per ogni $u \in C_0^\infty(V)$, vale la stima:

$$\|u\|^2_{H^\varepsilon} \leq C(|(Lu, u)| + \|u\|_2^2)$$

ove $\|\cdot\|_{H^\varepsilon}$ è la norma nello spazio di Sobolev classico di ordine ε.

La principale classe di operatori da noi esaminata è costituita dai cosiddetti *Sublaplaciani* su gruppi di Lie stratificati, o Gruppi di Carnot. Si tratta di un'ampia classe di operatori differenziali del secondo ordine, invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra su particolari gruppi di Lie e omogenei di grado due rispetto alle dilatazioni naturali sul gruppo. Esempio ben noto è il Laplaciano di Kohn sul Gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$.
Questi operatori costituiscono una sottoclasse particolarmente interessante degli operatori ipoellittici introdotti da Hormander nel 1967.
Lo studio dei sublaplaciani e delle equazioni alle derivate parziali sub-ellittiche ad essi associate riveste, oggi, un ruolo fondamentale in svariati campi della geometria e dell'analisi.

La nostra attenzione, oltre che ai sublaplaciani, è rivolta ad un'altra classe di operatori del secondo ordine, il cui esempio modello è costituito dall'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, con $\alpha > 0$. Quest'ultimo è anch'esso omogeneo di grado due rispetto ad una famiglia di dilatazioni anisotrope su $\mathbb{R}^N$, ma non risulta invariante rispetto ad alcuna operazione di gruppo su $\mathbb{R}^N$. Esso rientra nella classe di operatori subellittici introdotta e studiata da Franchi e Lanconelli in [19],[20].

Come si potrà osservare nel seguito, una caratteristica particolarmente interessante dell'analisi degli operatori sinora citati sta nel fatto che il ruolo della dimensione spaziale è assunto dalla *dimensione omogenea* dello spazio ambiente rispetto alle dilatazioni.

Il lavoro di tesi si compone come segue.

Il **capitolo 1** è dedicato alla descrizione delle principali proprietà degli operatori da noi esaminati. Nella prima parte si presentano i sublaplaciani e la ricca struttura algebrico-geometrica ad essi associata.
Nella seconda, invece, si introduce l'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$ e si descrive la particolare geometria generata dai campi vettoriali che realizzano $\mathcal{L}$ come "somma di quadrati". Per tali campi si ricava una disuguaglianza di Sobolev globale, come conseguenza dei teoremi di embedding per campi non regolari dimostrati da Franchi e Lanconelli in [21].
Un'ampia sezione viene poi dedicata allo studio dell'esistenza e delle proprietà di integrabilità delle funzioni di Green di $\mathcal{L}$, ottenute col metodo delle cosiddette *funzioni di Green approssimate*. Queste stime costituiscono un ingrediente fondamentale per le dimostrazioni del capitolo 3.

Il **capitolo 2** contiene il risultato principale da noi ottenuto in quanto a generalità, ovvero l'estensione della disuguaglianza di Brezis-Lieb richiamata nel Teorema D1 al contesto astratto dei Sublaplaciani. Si è, infatti, provato che se $\mathbb{G}$ è un gruppo di Carnot di dimensione omogenea Q, vale il seguente:

Teorema D2 *Se $\Omega \subset \mathbb{G}$ è un aperto limitato, esiste una costante positiva $C = C(\Omega)$ tale che*

$$\|\nabla_{\mathbb{G}} u\|_2^2 \geq S\|u\|_{2^*}^2 + C\|u\|_{\frac{Q}{Q-2},w}^2 \quad \forall\, u \in S_0^1(\Omega). \tag{3}$$

ove $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$ ed S è la miglior costante per l'embedding di Sobolev-Folland-Stein.

Si è, inoltre, dimostrata una disuguaglianza più forte della (3), recante come termine di resto la norma $\|\nabla_{\mathbb{G}} u\|_{\frac{Q}{Q-1},w}$.
Tenuto conto della particolare forma assunta dalla soluzione fondamentale dei Sublaplaciani (si veda la sezione 1.1), la disuguaglianza (3) si rivela in perfetto accordo col Principio 2. Inoltre, la (3) suggerisce che l'unica dimensione critica per un sublaplaciano possa essere la dimensione omogenea $Q = 3$. Ma poichè l'unico gruppo di Carnot di dimensione 3 è banalmente $(\mathbb{R}^3, +)$ con il Laplaciano classico come sublaplaciano canonico, si può intuire che l'unico sublaplaciano a presentare il fenomeno delle dimensioni critiche sia il Laplaciano euclideo.
Questa deduzione è supportata dal fatto che il più semplice gruppo di Carnot non abeliano di passo 2, ovvero il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, che ha dimensione omogenea $Q = 2n + 2 \geq 4$, non presenta dimensioni critiche, come dimostrato da Citti in [12] (si veda la Sezione 4.2).
Una sezione a se stante del capitolo viene dedicata al caso particolare del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, ove la conoscenza esplicita dei minimizzanti di Sobolev consente di approfondire la nostra analisi. In particolare, dimostriamo che la disuguaglianza di Sobolev per il gradiente di Heisenberg può essere migliorata non solo sui limitati, ma sull'intero spazio, in termini della "distanza" dall'insieme dei minimizzanti. Questo nostro risultato estende al gruppo di Heisenberg il risultato ottenuto in ambito euclideo da Bianchi ed Egnell in [3].

Nel **capitolo 3**, in analogia con quanto dimostrato per i sublaplaciani, ci si è chiesto se fosse possibile ottenere risultati simili per altri operatori subellittici. Si è, dunque, preso in esame l'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, con $\alpha > 0$.

Il tentativo di estendere i risultati raggiunti a questo tipo di operatore ha presentato difficoltà nuove, dovute alla mancanza di invarianza rispetto a traslazioni di gruppo. Ciononostante, si è dimostrato l'analogo della disuguaglianza (3) per tutti gli aperti limitati $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ intersecanti l'insieme di degenerazione dell'operatore, ovvero l'insieme $\{x = 0\}$. La dimostrazione ha richiesto un'attenta analisi delle proprietà di sommabilità L^p-deboli uniformi rispetto al polo delle funzioni di Green di $\mathcal{L}$.

Il **capitolo 4**, infine, è dedicato allo studio del problema critico (1) per gli operatori $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ e $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^2\Delta_y$. Nella prima parte, si riportano i risultati noti nel caso del laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^n}$, attestanti l'assenza di dimensioni critiche per questo operatore. Nella seconda, invece, formuliamo il problema critico per l'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^2\Delta_y$ e presentiamo alcuni nostri risultati, che rivelano la *criticità* della dimensione omogenea $Q = 3$. Mediante un argomento di tipo Pohozaev si individua, infatti, una classe di domini limitati in dimensione omogenea $Q = 3$ per i quali l'analogo del problema (1) per $\mathcal{L}$ non ammette soluzione per λ sufficientemente piccoli.

In relazione ai principi 1 e 2 sopra enunciati, i risultati da noi ottenuti si possono sintetizzare nelle due tabelle seguenti:

Operatore	$G(0,\xi)$	L^2_{loc}-sommabilità di $G(0,\xi)$	dimensioni critiche
$-\Delta_{\mathbb{H}^n}$	$\dfrac{C}{\lvert\xi\rvert_{\mathbb{H}^n}^{Q-2}}$	nessuna dim.	nessuna
$-(\Delta_x + \lvert x\rvert^2\Delta_y)$	$\dfrac{C}{d(\xi)^{Q-2}}$	$Q < 4$	$Q = 3$

OPERATORE	$G(0,\xi)$	SOMMABILITÀ OTTIMALE di $G(0,\xi)$	TERMINE di RESTO OTTIMALE
$-\Delta_{\mathbb{G}}$	$\dfrac{C}{\lvert\xi\rvert_{\mathbb{G}}^{Q-2}}$	$L_{\frac{Q}{Q-2},w}$	$\lVert\cdot\rVert_{\frac{Q}{Q-2},w}$
$-(\Delta_x+\lvert x\rvert^{2\alpha}\Delta_y)$	$\dfrac{C}{d_\alpha(\xi)^{Q-2}}$	$L_{\frac{Q}{Q-2},w}$	$\lVert\cdot\rVert_{\frac{Q}{Q-2},w}$

Come si può notare, vi è una perfetta corrispondenza tra le ultime due colonne di ciascuna tabella, proprio come osservato in [31] e [32] nel caso degli operatori ellittici.
Questa nostra analisi, dunque, conferma la validità dei principi 1 e 2 nei casi subellittici esaminati ed evidenzia anche in questo contesto il ruolo chiave assunto dalle proprietà di sommabilità della soluzione fondamentale nei problemi caratterizzati da mancanza di compattezza.

Capitolo 1

Alcuni operatori subellittici e loro soluzioni fondamentali

Introduzione

In questo capitolo presentiamo gli operatori che saranno oggetto di indagine nella tesi e ne studiamo alcune proprietà.

La prima parte del capitolo è dedicata ai cosiddetti *Sublaplaciani* su gruppi di Lie stratificati, o "Gruppi di Carnot".
Questi operatori, invarianti per traslazione su particolari Gruppi di Lie non Abeliani e omogenei di grado due rispetto alle dilatazioni naturali sul tali gruppi, costituiscono una sottoclasse particolarmente interessante degli operatori introdotti da Hormander nel 1967.
Più precisamente, i Sublaplaciani svolgono nell'ambito degli operatori ellittico-degeneri di tipo Hormander un ruolo analogo a quello ricoperto nel contesto ellittico dagli operatori a coefficienti costanti, invarianti per traslazione sul gruppo di Lie Abeliano $\mathbb{R}^N$. Esempio ben noto di sublaplaciano è il cosiddetto Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ sul Gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$.
Illustreremo brevemente le principali caratteristiche di questi operatori e la ricca struttura algebrico-geometrica ad essi associata.

Nella seconda parte del capitolo ci occupiamo, invece, di un'altra classe di operatori subellittici, introdotti e studiati da Franchi e Lanconelli in [19], [20] e [21], il cui esempio modello è costituito dall'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, con $\alpha > 0$.
A differenza dei sublaplaciani, questi operatori non sono invarianti rispetto a traslazioni di gruppo e non sono in generale di tipo Hormander, perchè i

campi X_j che li realizzano come "somme di quadrati" non sono sufficientemente regolari affinchè la condizione sul rango sia formulabile. Nonostante ciò, le "buone" proprietà della metrica di controllo associata ai campi ci consentono anche in questo caso un'analisi soddisfacente delle problematiche in esame.
Si riesce, ad esempio, ad ottenere un quadro completo delle disuguaglianze di tipo-Sobolev associate a questi campi.
A tal proposito, si fa vedere in particolare come una disuguaglianza di Sobolev globale si possa ricavare dai risultati dimostrati in [21], facendo uso di teoremi di embedding per spazi di Sobolev ordinari anisotropi.
Un'ampia sezione viene poi dedicata al delicato studio dell'esistenza e delle proprietà di sommabilità delle funzioni di Green di tali operatori. Questi risultati vengono ottenuti stimando preliminarmente le cosiddette *funzioni di Green approssimate*. Le stime L^p-deboli uniformi rispetto al polo per le funzioni di Green di $\mathcal{L}$ provate in questo capitolo costituiranno un ingrediente fondamentale per le dimostrazioni del Capitolo 3.

1.1 Sublaplaciani su gruppi di Lie stratificati

Prima di introdurre la definizione di gruppo di Lie stratificato, o "Gruppo di Carnot", richiamiamo per comodità di lettura alcune nozioni riguardanti i gruppi e le algebre di Lie, che ricorreranno nel seguito.

Sia $\mathfrak{h}$ un'algebra di Lie e denotiamo con $[\cdot,\cdot]$ l'operazione di bracket su $\mathfrak{h}$. Se V e W sono due sottoinsiemi di $\mathfrak{h}$, indicheremo con $[V,W]$ il seguente sottospazio di $\mathfrak{h}$:

$$[V,W] := \text{span}\{\, [v,w] \mid v \in V, w \in W\}.$$

Ricordiamo che un'algebra di Lie si dice *nilpotente* di passo m se, definiti induttivamente i seguenti ideali di $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{h}_{(1)} = \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{h}_{(j)} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_{(j-1)}]$$

risulta $\mathfrak{h}_{(m+1)} = \{0\}$ e $\mathfrak{h}_{(m)} \neq \{0\}$.

Sia, ora, M una varietà differenziabile N-dimensionale e si consideri l'algebra di Lie dei campi vettoriali su M, dotata dell'usuale operazione di commutazione, definita per ogni coppia di campi X e Y come:

$$[X,Y]f = Y(Xf) - X(Yf)$$

per ogni funzione regolare f su M.
Richiamiamo la definizione di *algebra di Lie generata da una famiglia di campi vettoriali* e relativo *rango.*

Definizione 1.1.1. *Data una famiglia di campi vettoriali* $X_1, \ldots, X_m$ *su una varietà* N*-dimensionale* M*, denoteremo con* $Lie\{X_1, \ldots, X_m\}$ *e chiameremo* algebra di Lie generata da $X_1, \ldots, X_m$ *lo spazio vettoriale generato dai campi* $X_1, \ldots, X_m$ *e dai loro commutatori di qualsiasi ordine.*

Dunque, un campo Z appartiene a $Lie\{X_1, \ldots, X_m\}$ se e soltanto se Z è combinazione lineare finita di termini della forma

$$[X_{i_1}[X_{i_2}, \ldots, [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}]]]$$

con $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i_h \leq m$ per $1 \leq h \leq k$.

Per ogni fissato $x \in M$, l'insieme

$$V(x) := \{Z(x) \mid Z \in Lie\{X_1, \ldots, X_m\}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^N$. Si pone:

$$\text{rango}\, Lie\{X_1, \ldots, X_m\}(x) = \dim V(x).$$

Nel caso in cui la varietà sia un gruppo di Lie $(\mathbb{G}, \circ)$, allora l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra rispetto all'operazione di gruppo su $\mathbb{G}$ costituisce una sottoalgebra dell'algebra dei campi vettoriali su $\mathbb{G}$, detta l'*algebra di Lie di* $\mathbb{G}$.

Dopo questi brevi richiami, passiamo a dare la definizione classica astratta di gruppo di Carnot presente in letteratura.

Definizione 1.1.2. *Un* Gruppo di Carnot *(o* gruppo stratificato*)* $\mathbb{H}$ *è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie* $\mathfrak{h}$ *ammette una stratificazione, ovvero una decomposizione diretta del tipo:*

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$$

ove gli spazi vettoriali V_j *verificano le seguenti condizioni:*

$$[V_1, V_{j-1}] = V_j \ \textit{per}\ 2 \leq j \leq r; \quad [V_1, V_r] = \{0\}.$$

Dunque, in particolare, $\mathfrak{h}$ è nilpotente di passo r.
Assegnata una qualunque base $X = (X_1, \ldots, X_m)$ del primo strato V_1 dell'algebra $\mathfrak{h}$, l'operatore differenziale

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{m} X_j^2$$

è detto il *Sublaplaciano* su $\mathbb{H}$ associato ad X.

Introdurremo, ora, una definizione di gruppo di Carnot più operativa, che viene più spesso usata in un contesto analitico e che noi adotteremo per il seguito.
Innanzitutto diamo la definizione di *gruppo di Lie omogeneo* (si veda ad es. [48], cap. XIII.5).

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$. Supponiamo, inoltre, che su $\mathbb{R}^N$ sia data una famiglia di *dilatazioni* della seguente forma:

$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(r)}) = (\lambda^{\alpha_1} x^{(1)}, \lambda^{\alpha_2} x^{(2)}, \cdots, \lambda^{\alpha_r} x^{(r)}) \qquad (1.1.1)$$

ove $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$ per $i = 1, \ldots, r$ e $N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N$ e gli esponenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sono numeri reali strettamente positivi, e che le dilatazioni δ_λ siano automorfismi del gruppo $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$, ovvero che

$$\delta_\lambda(x \circ y) = (\delta_\lambda x) \circ (\delta_\lambda y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{G}.$$

Allora, la terna $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ si dirà un *gruppo di Lie omogeneo.*
Il numero

$$Q = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j N_j$$

naturalmente legato alle dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$, essendo λ^Q lo jacobiano della mappa

$$x \longmapsto \delta_\lambda(x) \quad \forall x \in \mathbb{G}$$

è detta *dimensione omogenea* del gruppo $\mathbb{G}$ e gioca il ruolo della dimensione topologica in questo contesto. In particolare osserviamo che, denotata con $|E|$ la misura di Lebesgue di un qualunque insieme misurabile E, risulta:

$$|\delta_\lambda(E)| = \lambda^Q |E|.$$

Riguardo all'operazione di gruppo $\circ$ su un gruppo di Lie omogeneo, si osserva facilmente che l'elemento neutro per $\circ$ è sempre costituito dallo zero di $\mathbb{R}^N$. Infatti, poichè ogni δ_λ è un automorfismo di gruppo, se e è lo zero di $\mathbb{G}$ deve risultare $\delta_\lambda(e) = e \; \forall \, \lambda > 0$. Ciò prova che $e = (0, \ldots, 0)$.

Diamo, ora, la definizione di Gruppo di Carnot che noi adotteremo e che risulta equivalente alla definizione classica astratta a meno di isomorfismi (per una dimostrazione dettagliata di questa equivalenza si veda ad es. [4]).

Definizione 1.1.3. *(*Gruppo di Carnot*). Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ un gruppo di Lie omogeneo dotato di dilatazioni della forma:*

$$\delta_\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(r)}) = (\lambda \, x^{(1)}, \lambda^2 \, x^{(2)}, \cdots, \lambda^r \, x^{(r)}) \tag{1.1.2}$$

dove $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$ per $i = 1, \ldots, r$ e $N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N$.
Denotata con $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$, per $i = 1, \ldots, N_1$ sia X_i l'unico campo vettoriale di $\mathfrak{g}$ che coincide con la derivata parziale $\frac{\partial}{\partial x_i}$ nell'origine. Supponiamo, ora, che valga la seguente ipotesi:

$$\text{(H)} \quad \text{rango } Lie\{X_1, \ldots, X_{N_1}\}(x) = N \qquad \forall x \in \mathbb{G}.$$

Allora, $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ si dirà un Gruppo di Carnot *di passo r con N_1 generatori.*

Dunque, in breve, un gruppo di Carnot è un particolare gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$ con l'ipotesi aggiuntiva (H).
La dimensione omogenea di un gruppo di Carnot è il numero

$$Q = \sum_{j=1}^{r} j N_j.$$

L'operatore differenziale del secondo ordine

$$\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{N_1} X_i^2$$

è chiamato il *Sublaplaciano canonico* su $\mathbb{G}$, mentre un *sublaplaciano* su $\mathbb{G}$ è ogni operatore della forma

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_1} Y_i^2$$

con $Y_1, \ldots, Y_{N_1}$ base di *span*$\{X_1, \ldots, X_{N_1}\}$.
Osserviamo che l'operatore $\mathcal{L}$ è invariante rispetto alle traslazioni del gruppo,

ovvero denotata con $\tau_x : y \mapsto x \circ y$ la traslazione a sinistra di elemento x, risulta

$$\mathcal{L}(u \circ \tau_x) = \mathcal{L}u \circ \tau_x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.
$\mathcal{L}$ risulta, inoltre, omogeneo di grado 2 rispetto alle dilatazioni del gruppo, ovvero

$$\mathcal{L}(u \circ \delta_\lambda) = \lambda^2 \mathcal{L}u \circ \delta_\lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

Si noti che l'ipotesi (H) equivale a richiedere che l'algebra di Lie generata da $X_1, \dots, X_{N_1}$ coincida con l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ dei campi invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$.

Osservazione 1.1.4. I campi "canonici" $X_1, \dots, X_{N_1}$, ovvero i campi coincidenti nell'origine rispettivamente con le derivate parziali $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{N_1}}$, si ottengono direttamente dalle prime N_1 colonne della matrice jacobiana delle traslazioni calcolata in 0. Basta, infatti, tener conto che, denotata con τ_x la traslazione a sinistra di elemento x, vale la seguente caratterizzazione dei campi invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$:

$$X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow X(x) = J_{\tau_x}(0) \cdot X(0) \quad \forall x \in \mathbb{G}$$

dove $X(x)$ denota il vettore dei coefficienti del campo $X = \sum_{i=1}^N X^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Osservazione 1.1.5. L'ipotesi (H) implica che ogni sublaplaciano $\mathcal{L}$ è *ipoellittico*, in virtù del famoso teorema sulla ipoellitticità di Hormander [30]. Quest'ultimo, infatti, afferma che se $X_1, \dots, X_m$ sono campi C^∞ su un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ e

$$\text{rango } Lie\{X_1, \dots, X_m\}(x) = N \qquad \forall x \in \Omega$$

allora l'operatore $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^m X_i^2$ è ipoellittico nell'aperto Ω, ovvero se u è una distribuzione su Ω tale che $\mathcal{L}u \in C^\infty(\Omega)$, allora $u \in C^\infty(\Omega)$.

Esempi. Il più semplice esempio di gruppo di Carnot è ovviamente $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, +)$ con le usuali dilatazioni isotrope $\delta_\lambda(x) = \lambda x$. In questo caso il classico operatore di Laplace Δ è il sublaplaciano canonico su $\mathbb{G}$ e la dimensione omogenea Q coincide con N.

L'esempio più semplice di gruppo di Carnot non abeliano è il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$, ove la legge di gruppo $\circ$ è definita come segue. Denotati con

$$\xi = (z, t) = (x, y, t) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) \tag{1.1.3}$$

i punti di $\mathbb{R}^{2n+1}$, la legge $\circ$ opera nel modo seguente:

$$\xi \circ \xi' = (z + z',\, t + t' + 2(< x', y > - < x, y' >)) \tag{1.1.4}$$

dove $<,>$ denota il prodotto interno in $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{H}^n$ è un gruppo omogeneo con le dilatazioni

$$\delta_\lambda(\xi) = (\lambda z, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0 \tag{1.1.5}$$

per cui la dimensione omogenea dello spazio risulta essere $Q = 2n + 2$.
Calcoliamo, ora, i campi invarianti a sinistra su $\mathbb{H}^n$ e coincidenti nell'origine con le prime $2n$ derivate parziali $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Essendo la matrice jacobiana delle traslazioni calcolata in 0 la seguente:

$$J_{\tau_\xi}(0) = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 2y & -2x & 1 \end{pmatrix}$$

dalle prime $2n$ colonne si ottengono i campi:

$$\begin{aligned} X_j &= \partial_{x_j} + 2y_j \partial_t, \quad j = 1, \dots, n \\ Y_j &= \partial_{y_j} - 2x_j \partial_t \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

e poichè

$$[X_j, Y_k] = -4\delta_{j,k}\, \partial_t, \tag{1.1.7}$$

risulta

$$\text{rango } \mathit{Lie}\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}(\xi) = 2n + 1$$

in ogni punto $\xi \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Dunque, $\mathbb{H}^n$ è un gruppo di Carnot di passo due con $2n$ generatori, e l'operatore

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2) \tag{1.1.8}$$

è il suo Sublaplaciano canonico, noto anche come *Laplaciano di Kohn*.
Si noti che le relazioni (1.1.7) corrispondono alle relazioni di commutazione canoniche tra momento e posizione nella meccanica quantistica. Infatti, il gruppo di Heisenberg fu introdotto da Weyl proprio nella sua formulazione matematica della meccanica quantistica (si veda ad es. [48]).

Elenchiamo, ora, alcune proprietà dell'operazione di gruppo $\circ$ su un generico gruppo di Carnot $\mathbb{G}$, direttamente derivanti dalla definizione.
Dalla sola ipotesi di omogeneità del gruppo $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ si deduce che l'operazione di gruppo è polinomiale ed ha una ben determinata forma esplicita.
Infatti, se $(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ è un gruppo di Lie omogeneo, posto, in accordo con le notazioni (1.1.1):

$$x \circ y = \Big((x \circ y)^{(1)}, (x \circ y)^{(2)}, \ldots, (x \circ y)^{(r)} \Big) \tag{1.1.9}$$

risulta:

$$\begin{aligned} &(x \circ y)^{(1)} = x^{(1)} + y^{(1)} \\ &(x \circ y)^{(i)} = x^{(i)} + y^{(i)} + Q^{(i)}(x, y) \qquad 2 \leq i \leq r \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

dove

1. $Q^{(i)}$ dipende al più dalle variabili $x^{(1)}, \ldots, x^{(i-1)}$ e $y^{(1)}, \ldots, y^{(i-1)}$;
2. le componenti di $Q^{(i)}$ sono polinomi misti nelle variabili x ed y;
3. $Q^{(i)}(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda^i Q^{(i)}(x, y)$.

Per una dimostrazione del risultato appena enunciato si veda ad esempio [48], cap. XIII.5.

Dalla particolare forma dell'operazione di gruppo su $\mathbb{G}$, si deduce ad esempio l'invarianza della misura di Lebesgue rispetto alle traslazioni a sinistra e a destra sul gruppo. Infatti, se consideriamo, ad esempio, le traslazioni a sinistra, ovvero mappe della forma

$$\tau_x : y \mapsto x \circ y$$

con $x \in \mathbb{G}$ fissato, e ne calcoliamo la matrice Jacobiana, otteniamo una matrice triangolare inferiore della seguente forma:

$$A = \begin{pmatrix} I_{N_1} & 0 & \ldots & 0 \\ * & I_{N_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & * & I_{N_r} \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è 1, il che dimostra che la misura di Lebesgue $\mathrm{d}x$ è invariante rispetto alle traslazioni a sinistra. Analogamente si vede che $\mathrm{d}x$ è invariante rispetto alle traslazioni a destra. Dunque, la misura di Lebesgue è una misura di Haar su $\mathbb{G}$.

Richiamiamo, ora, la definizione di norma omogenea $|\cdot|$ su un gruppo omogeneo $\mathbb{G}$.

Definizione 1.1.6. *Si definisce* norma omogenea *su* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ *ogni funzione continua* $|\cdot| : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[$, *regolare fuori dall'origine e verificante le condizioni:*

i) $|\delta_\lambda(x)| = \lambda |x|$

ii) $|x^{-1}| = |x|$

iii) $|x| = 0$ *se e solo se* $x = 0$

Dalla definizione segue, inoltre, che ogni norma omogenea soddisfa la seguente disuguaglianza pseudo-triangolare

$$|x \circ y| \leq \beta(|x| + |y|) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{G}$$

ove β è una opportuna costante, $\beta \geq 1$.
Quindi, posto $d(x,y) = |y^{-1} \circ x|$, risulta che

$$d(x,y) \leq \beta\,(d(x,z) + d(z,y)) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{G}$$

Inoltre, poichè $|x| = |x^{-1}|$, risulta anche

$$d(x,y) = d(y,x)$$

Chiameremo *d-sfere* su $\mathbb{G}$ le sfere definite mediante la "pseudometrica" d, ovvero gli insiemi

$$B_d(x,r) = \{y \in \mathbb{G} \mid d(x,y) < r\}$$

Poichè la misura di Lebesgue è una misura di Haar su $\mathbb{G}$, si ha che

$$|B_d(x,r)| = |B_d(0,r)| = r^Q |B_d(0,1)|.$$

Ricordiamo, inoltre, che $\forall\ 0 \leq r_1 < r_2$ e per ogni funzione misurabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vale la seguente formula per le coordinate polari:

$$\int_{B_d(0,r_2)\setminus B_d(0,r_1)} f(d(x))\,\mathrm{d}x \;=\; Q\,|B_d(0,1)| \int_{r_1}^{r_2} f(\rho)\,\rho^{Q-1}\,\mathrm{d}\rho,$$

se almeno uno dei due integrali esiste.

La soluzione fondamentale. Una notevole proprietà dei sublaplaciani su gruppi di Carnot è l'esistenza di una soluzione fondamentale. Vale, infatti, il seguente teorema, per la cui dimostrazione si veda [16], [22].

Teorema 1.1.7. *Sia $\mathbb{G}$ è un gruppo di Carnot di dimensione omogenea $Q \geq 3$ ed $\mathcal{L}$ un sublaplaciano su $\mathbb{G}$. Allora esiste una norma omogenea $|\cdot|$ su $\mathbb{G}$ tale che la funzione*

$$\Gamma_x(y) = \frac{C_Q}{|x^{-1} \circ y|^{Q-2}}$$

è una soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ con polo in x, dove C_Q è una opportuna costante positiva.

Espressione radiale dei Sublaplaciani. Sia $\mathcal{L}$ un sublaplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ e denotiamo con d la norma omogenea su $\mathbb{G}$ prevista dal teorema precedente. Vediamo qual è l'espressione assunta da $\mathcal{L}$ su funzioni "radiali", ovvero dipendenti dalla sola d. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare e sia $u(x) = f(d(x))$. Allora, per calcolo diretto si ha

$$\mathcal{L}u = f''(d)|Xd|^2 \, + \, f'(d)\mathcal{L}d \tag{1.1.11}$$

e poichè $\Gamma \approx d^{2-Q}$ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$, calcolando la precedente in $f(d) = d^{2-Q}$ si ha:

$$0 = \mathcal{L}d^{2-Q} = (2-Q)(1-Q)d^{-Q}|Xd|^2 \, + \, (2-Q)d^{1-Q}\mathcal{L}d, \quad d \neq 0.$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{L}d = (Q-1)d^{-1}|Xd|^2$$

per cui, sostituendo nella (1.1.11), si ha la seguente espressione

$$\mathcal{L}f(d) = \psi \left[f''(d) + \frac{Q-1}{d} f'(d) \right]$$

ove si è posto

$$\psi = |Xd|^2.$$

Si osservi che la funzione ψ è omogenea di grado 0 rispetto alle dilatazioni del gruppo e quindi limitata in $\mathbb{G}$. Nel caso euclideo la densità ψ è identicamente uguale a 1, e quindi il laplaciano ordinario trasforma funzioni radiali in funzioni radiali. Questo, invece, non si verifica nel caso dei sublaplaciani. Ad esempio, nel caso del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, descritto nel paragrafo dedicato agli esempi e con le notazioni ivi introdotte, la densità ψ ha simmetria "cilindrica", risultando $\psi = |z|^2/d^2$.

1.2 L'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, $\alpha > 0$

Consideriamo, ora, un'altra classe di operatori differenziali del secondo ordine differente da quella dei sublaplaciani, il cui esempio modello è costituito dal seguente operatore, largamente studiato in letteratura, definito su $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^n_y$ da

$$\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y, \qquad \alpha > 0.$$

$\mathcal{L}$ è un operatore ellittico sull'insieme $x \neq 0$ e degenera sulla varietà $\{0\} \times \mathbb{R}^n$. Questo operatore rientra nell'ampia classe di operatori subellittici introdotta e studiata da Franchi e Lanconelli in [19], [20], [21].
L'operatore $\mathcal{L}$, analogamente ai sublaplaciani, possiede una naturale famiglia di dilatazioni anisotrope, ovvero:

$$\delta_\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^{\alpha+1} y), \quad \lambda > 0. \tag{1.2.1}$$

Si verifica facilmente che $\mathcal{L}$ risulta omogeneo di grado due rispetto a $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$, i.e.

$$\mathcal{L} \circ \delta_\lambda = \lambda^2 \delta_\lambda \circ \mathcal{L}$$

Lo jacobiano delle dilatazioni δ_λ è pari a λ^Q, dove

$$Q = m + (\alpha + 1)n.$$

e quindi, denotata con $dxdy$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{m+n}$, si ha che

$$d \circ \delta_\lambda(x, y) = \lambda^Q \, dxdy.$$

Come vedremo, il numero Q, ovvero la *dimensione omogenea* di $\mathbb{R}^N$ rispetto alle dilatazioni δ_λ, gioca il ruolo di una dimensione spaziale globale nell'analisi dell'operatore $\mathcal{L}$.
Osserviamo esplicitamente che questo operatore, omogeneo al pari dei sublaplaciani rispetto ad una famiglia di dilatazioni anisotrope, non risulta invariante rispetto ad alcuna legge di gruppo su $\mathbb{R}^N$.
Si noti che $\mathcal{L}$ può essere scritto in forma di "somma di quadrati"

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \tag{1.2.2}$$

scegliendo

$$\begin{array}{rcll} X_i & = & \frac{\partial}{\partial x_i} & \text{per } i = 1, \ldots, m \\ X_{i+m} & = & |x|^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i} & \text{per } i = 1, \ldots, n \end{array} \tag{1.2.3}$$

Se α è un intero positivo, i campi X_j soddisfano la condizione sul rango di Hormander, ma nel caso generale questa condizione è priva di senso poichè i campi vettoriali non sono sufficientemente regolari.
Sottolineamo che esiste una stretta connessione tra l'operatore $\mathcal{L}$ quando $\alpha = 1$ e il sublaplaciano canonico sul gruppo di Heisenberg. Infatti, supponiamo che la dimensione del primo gruppo di variabili sia un intero pari $m = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, e sia $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2k}$ e $t \in \mathbb{R}$. Allora, nelle coordinate (z, t) il sublaplaciano sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^k$ può essere scritto nella forma

$$\Delta_{\mathbb{H}^k} = \Delta_z + 4|z|^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\frac{\partial}{\partial t}T,$$

dove T è il campo vettoriale trasversale

$$T = \sum_{j=1}^{k} (y_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial y_j}).$$

Se si osserva che $Tu = 0$ se e solo se u è radiale nella variabile $z = (x, y)$, si deduce che il sublaplaciano agisce sulle funzioni a simmetria cilindrica proprio come l'operatore $\mathcal{L}$ con $\alpha = 1$. Ricordiamo che una distanza di controllo naturalmente associata all'operatore $\mathcal{L}$ è stata introdotta e studiata da Franchi e Lanconelli in [19], [20]. Qui di seguito richiamiamo le principali proprietà di questa metrica.

La geometria indotta dai campi. Come già osservato, i campi introdotti in (1.2.3) costituiscono un caso particolare dei campi introdotti e studiati in [19], [20], [21]. Si tratta di campi della forma $X_j = \lambda_j \partial_j$ per $j = 1, \ldots, N$, ove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ sono funzioni continue non-negative in $\mathbb{R}^N$ soddisfacenti le seguenti proprietà:

(P1) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$ $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$, $j = 2, \ldots, N$;

(P2) posto $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^N : \prod_{k=1}^{N} x_k = 0\}$, allora $\lambda_j(x) > 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \Pi$ e
$\lambda_j \in C(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N \setminus \Pi)$, $\ j = 1, \ldots N$;

(P3) $\lambda_j(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_N) = \lambda_j(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ $\forall\, i = 1, \ldots, j-1$
e $j = 2, \ldots, N$;

(P4) esistono numeri non-negativi b_{ji} tali che:

$$0 \le x_i(\partial_i \lambda_j)(x) \le b_{ji}\lambda_j(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Pi$, $\forall i < j$, $j = 2, \dots, N$.

Osservazione 1.2.1. Osserviamo che la proprietà (P4) equivale a richiedere la seguente:

$\forall\, 0 < \theta < 1$ e $\forall x \in \mathbb{R}^N$:

$$\theta^{b_{ji}}\lambda_j(x) \le \lambda_j(x_1, \dots, \theta x_i, \dots x_{j-1}) \quad 2 \le j \le N,\, 1 \le i \le j-1$$

come verificato in [21], Prop. 4.2.

Dedichiamo questa breve premessa ad illustrare la particolare geometria introdotta da Franchi e Lanconelli per questo tipo di campi. Essi dimostrano che un sistema di campi soddisfacente le proprietà sopraelencate genera una distanza d su $\mathbb{R}^N$, tale che $(\mathbb{R}^N, d, m)$ risulta uno *spazio di tipo omogeneo* (nel senso di Coifman e Weiss) rispetto alla misura di Lebesgue m.
Ricordiamo che una tripla (M, d, μ) è chiamata uno *spazio metrico omogeneo* se d e μ sono, rispettivamente, una distanza e una misura di Borel regolare su M, t.c.

$$A := \sup_{x \in M, r > 0} \frac{\mu(B_d(x, 2r))}{\mu(B_d(x, r))} < \infty$$

ove $B_d(x, r)$ denota la d-sfere con centro x e raggio r. Ovviamente $A \ge 1$. Il numero reale

$$Q = \log_2 A$$

è chiamato la *dimensione omogenea* di (M, d, μ).

Qui di seguito diamo la definizione di d e ne elenchiamo le proprietà. Cominciamo con l'introdurre le nozioni di vettore subunitario e curva subunitaria rispetto al sistema di campi X.

Un vettore $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{R}^N$ si dice X-*subunitario* in un punto x se

$$\left(\sum_{j=1}^N \gamma_j \xi_j\right)^2 \le \sum_{j=1}^N < X_j(x), \xi >^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

Una curva $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^N$ si dice X-*subunitaria* se è assolutamente continua e $\dot\gamma(t)$ è un vettore X-subunitario nel punto $\gamma(t)$ per q.o. $t \in [0, T]$.

Definizione 1.2.2. *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *definiamo* $d : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ *come segue:*

$$\begin{aligned} d(x,y) = \inf\{T \in \mathbb{R} \mid \text{ esiste } \gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^N \text{ curva subunitaria} \\ \text{t. c. } \ \gamma(0) = x, \ \gamma(T) = y\} \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Osservazione 1.2.3. d è una distanza ben definita. Infatti, le ipotesi sui coefficienti λ_j garantiscono l'esistenza di una curva X-subunitaria congiungente x ed y, per ogni coppia di punti x, y. Inoltre, si prova che $\exists C > 0$ t.c. $|x - y| \leq C d(x,y) \; \forall \, (x,y) \in \mathbb{R}^N$.

Per i nostri scopi, è utile introdurre una quasi-distanza (non-simmetrica) δ equivalente a d, più esplicitamente definita e che consente di ricavare delle significative stime per la metrica d. Ricordiamo che δ è stata definita e studiata in [19].

Se $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$ si pone:

$$\begin{aligned} &H_0(x,t) = x \\ &H_{k+1}(x,t) = H_k(x,t) \; + \; t\lambda_{k+1}(H_k(x,t))e_{k+1} \quad \text{per } \; k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

ove $\{e_k\}_{k=1}^N$ indica la base canonica di $\mathbb{R}^N$.
La funzione $s \mapsto F_j(x,s) = s\lambda_j(H_{j-1}(x,s))$ è strettamente crescente su $(0, \infty)$ per ogni $x = (x_1, \dots, x_N)$ t.c. $x_k \geq 0$, $k = 1, \dots, j-1$ e per $j = 1, \dots, N$. Dunque, è possibile definire la funzione inversa di $F_j(x, \cdot)$, ovvero si pone $\phi_j(x, \cdot) = (F_j(x, \cdot))^{-1}$ per $j = 1, \dots, N$.

Definizione 1.2.4. *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *definiamo* $\delta : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ *come segue:*

$$\delta(x,y) = \max_{j=1,\dots,N} \phi_j(x^*, |x_j - y_j|)$$

ove $x^* = (|x_1|, \dots, |x_N|)$.

Nel seguito useremo le seguenti notazioni per le d-sfere, le δ-sfere e le loro dilatazioni:

$$\begin{aligned} S(x,r) &= \{y \in \mathbb{R}^N \mid d(x,y) < r\} \\ Q(x,r) &= \{y \in \mathbb{R}^N \mid \delta(x,y) < r\} \\ \alpha S(x,r) = S(x, \alpha r), \; \alpha Q(x,r) &= Q(x, \alpha r), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

La seguente proposizione contiene le proprietà fondamentali delle funzioni F_j, ϕ_j, d e δ.

Proposizione 1.2.5. *Posto* $G_1 = 1$ *e* $G_j = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} G_i b_{ji}$ *per* $j = 2, \dots, N$, *risulta:*

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $s > 0$, $\theta \in (0,1)$ *si ha:*

$$\theta^{G_j} \leq F_j(x, \theta s)\big/F_j(x,s) \leq \theta$$
$$\theta \leq \phi_j(x^*, \theta s)\big/\phi_j(x^*, s) \leq \theta^{1/G_j}$$

(ii) $\exists\, a > 1$ *tale che*

$$\frac{1}{a} \leq \frac{d(x,y)}{\delta(x,y)} \leq a \quad \forall x, y.$$

(iii) Indicata con $|S(x,r)|$ *la misura di Lebesgue di* S, *risulta*

$$a^{-1} \leq |S(x,r)| \Big/ \prod_{j=1} F_j(x^*, r) \leq a$$

(iv) Posto $\varepsilon_j = (G_j)^{-1}$, *risulta*

$$d(x,y) \leq C \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^{\varepsilon_j} \tag{1.2.5}$$

da cui la locale hölderianità di d.
Infatti $d(x,y) \leq b|x-y|^{\varepsilon}$ *se* $|x-y| \leq 1$, *dove* $\varepsilon = \min_j \varepsilon_j$.

Osservazione 1.2.6. La *(iii)* della precedente descrive la misura delle sfere per la metrica d e assicura la *proprietà di duplicazione* seguente:

$$|S(x,2r)| \leq C\,|S(x,r)| \qquad \forall r > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

ove $C = a^2 2^{\sum_j G_j}$, da cui $(\mathbb{R}^N, d, m)$ è uno spazio metrico omogeneo.

Osservazione 1.2.7. Se si calcola la misura delle sfere metriche nel caso particolare dei campi su $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{m+n}$ definiti nella (1.2.3), ovvero per $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ per $i = 1, \dots, m$ e $X_{i+m} = |x|^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y_i}$ per $i = 1, \dots, n$, si ottiene la seguente espressione esplicita:

$\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.c. $\forall\, z = (x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $\forall\, r > 0$:

$$C_1 \leq \frac{|S(z,r)|}{r^{m+n}(|x|+r)^{\alpha n}} \leq C_2 \tag{1.2.6}$$

dalla quale risulta evidente la dipendenza della misura delle sfere dalla distanza del centro dall'insieme di degenerazione $\{x = 0\}$. In particolare, le sfere con centro su $\{x = 0\}$ hanno misura

$$C_1\, r^Q \leq |S(z,r)| \leq C_2\, r^Q$$

ove $Q = m + (\alpha + 1)n$ è la dimensione omogenea di $\mathbb{R}^N$ rispetto al sistema di campi X, mentre per sfere di centro qualsiasi vale solo la stima dal basso

$$C\, r^Q \leq |S(z,r)| \quad \forall\, r > 0.$$

Disuguaglianze di tipo Sobolev. Facciamo vedere, ora, come si possano ricavare disuguaglianze di Sobolev per i campi vettoriali definiti nella (1.2.3) a partire dai teoremi di embedding dimostrati da Franchi e Lanconelli in [21]. Il problema che ci poniamo è il seguente: esistono esponenti q tali che per qualche costante $C > 0$ si abbia

$$\|Xu\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq C\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \tag{1.2.7}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$?
Usando le dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$, si ottiene immediatamente che una condizione necessaria perchè valga la (1.2.7) è data da

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{1}{Q}. \tag{1.2.8}$$

Infatti, se la (1.2.7) vale per u, allora essa vale anche per i riscalamenti

$$u_\lambda(x,y) = u(\lambda x, \lambda^{\alpha+1} y)$$

ma

$$\|u_\lambda\|_q^q = \int |u(\lambda x, \lambda^{\alpha+1} y)|^q dxdy = \lambda^{-Q}\|u\|_q^q \tag{1.2.9}$$

e

$$\begin{aligned} \|Xu_\lambda\|_2^2 = \int |Xu_\lambda(x,y)|^2 dxdy &= \int |\lambda Xu(\lambda x, \lambda^{\alpha+1} y)|^2 \\ &= \lambda^{2-Q} \int |Xu|^2 dxdy = \lambda^{2-Q}\|Xu\|_2^2 \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Dunque, dalla disuguaglianza (1.2.7) applicata a u_λ, si ha

$$\lambda^{1-Q(1/2-1/q)}\|Xu\|_2 \geq C\|u\|_q \quad \forall \lambda > 0$$

da cui, considerando i casi limite per $\lambda \to 0$ e $\lambda \to +\infty$, segue necessariamente la (1.2.8).
Non è banale dimostrare che la (1.2.8) è anche sufficiente perchè valga la (1.2.7). Facciamo vedere che tale conclusione può essere dedotta dai risultati di embedding di Franchi e Lanconelli in [21]. Questi ultimi provano, tra gli altri risultati, che se $X = (X_1, \dots, X_N)$ è un sistema di campi vettoriali della forma

$$X_j = \lambda_j \partial_j \quad j = 1, \dots, N$$

dove i λ_j sono le funzioni non-negative possibilmente degeneri sugli assi coordinati con andamento polinomiale introdotte nel paragrafo precedente, allora, denotato con

$$W^{1,2}_X(\mathbb{R}^N) = W^{1,2}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_N)}(\mathbb{R}^N) = \{\, u \in L^2(\mathbb{R}^N) \,|\, X_j u = \lambda_j \partial_j\, u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

lo spazio di Sobolev naturalmente associato ai campi X_j, e denotato con

$$H^{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)}(\mathbb{R}^N) = W^{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N),2}(\mathbb{R}^N)$$

lo spazio di Sobolev ordinario anisotropo di ordine $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, dotato della norma

$$\|u\|_{H^{\vec{\varepsilon}}} = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+he_j) - u(x)|^2}{h^{1+2\varepsilon_j}} \right)^{1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}h \;+\; \|u\|_{L^2}$$

vale il seguente embedding continuo

$$W^{1,2}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_N)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)}(\mathbb{R}^N) \tag{1.2.11}$$

dove gli ε_j sono numeri reali positivi dipendenti dai coefficienti $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Essi sono esattamente:

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_j = \left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} (\varepsilon_i)^{-1} b_{ji} \right)^{-1} \quad \text{per } \; j = 2, \dots, N \tag{1.2.12}$$

ovvero gli inversi dei G_j definiti nella Proposizione 1.2.5. Si osservi che essi dipendono esclusivamente dai numeri b_{ji} caratterizzanti l'andamento polinomiale delle funzioni λ_j.
Quindi, così come Fefferman e Phong provano che, nel caso $\lambda_j \in C^\infty$, la disuguaglianza

$$d(x,y) \le C\,|x-y|^{\varepsilon}$$

conduce alla stima sub-ellittica

$$\|u\|_{H^\varepsilon} \leq C \left(\sum_j \|X_j u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \right),$$

Franchi e Lanconelli [21] dimostrano un risultato analogo nel caso non regolare in esame, tenuto conto della stima hölderiana (1.2.5). Più precisamente sussiste il seguente:

Teorema 1.2.8. *$\exists\, C > 0$ tale che $\forall\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ risulta*

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+he_j) - u(x)|^2}{h^{1+2\varepsilon_j}} \right)^{1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}h \;\leq\; C \sum_{j=1}^N \|X_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

ove gli ε_j sono definiti dalla (1.2.12).

Ora, se calcoliamo gli ε_j nel nostro caso, ovvero per i campi vettoriali $X_j = \lambda_j \partial_j$ con

$$\begin{cases} \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1 \\ \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_{m+n} = |x|^\alpha \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

otteniamo esattamente gli inversi degli esponenti di omogeneità nelle dilatazioni (1.2.1), ovvero:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m = 1 \\ \varepsilon_{m+1} = \ldots = \varepsilon_{m+n} = \frac{1}{1+\alpha} \end{cases}$$

Quindi

$$W^{1,2}_{(1,\ldots,1,|x|^\alpha,\ldots,|x|^\alpha)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^{(1,\ldots,1,\frac{1}{1+\alpha},\ldots,\frac{1}{1+\alpha})}(\mathbb{R}^N) \tag{1.2.13}$$

Ricordiamo a questo punto il seguente teorema di embedding per spazi di Sobolev ordinari anisotropi (si veda ad es. [2], [35]):

$$H^{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \tag{1.2.14}$$

per

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{1}{\sum_{j=1}^N 1/\varepsilon_j}$$

Allora, combinando gli embedding (1.2.13) e (1.2.14), si ottiene che lo spazio di Sobolev $W_X^{1,2}$ associato ai campi vettoriali in esame si immerge in maniera continua in L^q per

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{1}{Q} \tag{1.2.15}$$

e dalla disuguaglianza di immersione risultante:

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \|u\|_q \leq C\,(\|Xu\|_2 + \|u\|_2) \quad \text{per } q = \frac{2Q}{Q-2} \tag{1.2.16}$$

segue che la (1.2.7) vale per ogni funzione $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ se e soltanto se $q = 2Q/(Q-2)$, tenuto conto della disuguaglianza di Poincarè e della "criticità" dell'esponente q. Infatti, dalla (1.2.16) e dalla disuguaglianza di Poincarè, dimostrata per i campi X_j in [20], segue che se Ω è un aperto limitato, allora vale la seguente

$$\forall\, u \in C_0^\infty(\Omega) \quad \|u\|_q \leq C(\Omega)\,\|Xu\|_2.$$

Ora, se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, sia $B(0,R)$ una sfera contenente il supporto di u. Riscaliamo opportunamente u, in modo tale che $u_\lambda(x,y) = u(\lambda x, \lambda^{1+\alpha}y)$ abbia supporto nella sfera unitaria $B_1 = B(0,1)$. Allora per u_λ varrà la seguente

$$\|u_\lambda\|_q \leq C(B_1)\,\|Xu_\lambda\|_2$$

da cui, tenendo conto delle (1.2.9) e (1.2.10), si ottiene la disuguaglianza

$$\|u\|_q \leq C(B_1)\,\lambda^{1-Q(1/2-1/q)}\|Xu\|_2$$

ovvero

$$\|u\|_q \leq C(B_1)\,\|Xu\|_2$$

con costante C indipendente da u, come annunciato.

Il risultato dimostrato è in perfetta analogia con quello euclideo e conferma il ruolo di Q quale effettiva dimensione in questo tipo di problemi. Inoltre, esso conferma l'*ottimalità* dei risultati di embedding per gli spazi associati ai campi negli spazi di Sobolev ordinari anisotropi contenuti in [21].

Come vedremo nel paragrafo seguente, la dimensione Q, oltre ad avere il ruolo di una dimensione globale, gioca un ruolo importante nell'analisi locale dell'operatore $\mathcal{L}$ nei punti dell'insieme di degenerazione $\{0\} \times \mathbb{R}^n$. Lontano da questi punti, invece, l'operatore diventa uniformemente ellittico e, quindi, torna a prevalere la dimensione topologica $N = m + n$. Questa differenza di omogeneità da punto a punto costituisce una caratteristica tipica delle equazioni degeneri ed è evidenziata dalla nozione di *dimensione locale omogenea.*

Qui di seguito illustriamo questa definizione e facciamo vedere come nel nostro caso, accanto alla disuguaglianza di Sobolev "globale" ora dimostrata, sussistano, come nel caso degli operatori di Hormander, disuguaglianze di tipo-Sobolev "locali", coinvolgenti la dimensione locale omogenea.

Sia $X = (X_1, \dots, X_m)$ un sistema di campi vettoriali localmente Lipschitziani su $\mathbb{R}^N$ che generi una distanza di Carnot-Caratheodory d, ovvero una distanza definita mediante le curve subunitarie in maniera analoga a quanto visto nella (1.2.4), e sia U un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Si supponga, inoltre, che valga la seguente proprietà di *doubling* locale:

$\exists\, C > 0$, e $0 < R_0 < \infty$ tali che

$$|B(x, 2R)| \leq C|B(x, R)| \quad \forall\, x \in U \text{ e } \forall\, 0 < R < R_0 \tag{1.2.17}$$

Allora, posto $C_1 = \sup \frac{|B(x,2R)|}{|B(x,R)|}$ al variare di $x \in U$ e $0 < R < R_0$, il numero

$$Q(U) = \log_2 C_1 \tag{1.2.18}$$

si dirà *dimensione locale omogenea relativa ad* U (e al sistema X).

Si osservi che in molti casi di interesse la proprietà di duplicazione (1.2.17) è soddisfatta globalmente, ovvero con $R_0 = \infty$. Questo è ovviamente il caso di $\mathbb{R}^N$ con $X = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N})$ e la distanza euclidea, nel qual caso $C_1 = 2^N$. Più in generale, se G è un gruppo di Lie stratificato nilpotente e dx denota una misura di Haar su G, allora la (1.2.17) vale ancora con l'uguaglianza per ogni $0 < R < \infty$ e con $C_1 = 2^Q$, dove Q è la dimensione omogenea del gruppo.

Anche la metrica generata dai nostri campi $X_j = \lambda_j \partial_j$ gode di una proprietà di doubling globale, come evidenziato nell'osservazione 1.2.6. In particolare, se consideriamo i campi $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ per $i = 1, \dots, m$ e $X_{i+m} = |x|^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i}$ per $i = 1, \dots, n$, possiamo osservare che la dimensione omogenea "globale" $Q = m + (\alpha + 1)n$ coincide sempre con la dimensione omogenea "locale" per gli insiemi limitati intersecanti l'asse di degenerazione $\{x = 0\}$. Invece, per gli insiemi limitati U discosti dall'insieme $\{x = 0\}$, tenuto conto dell'espressione polinomiale della misura delle sfere (1.2.6), si può sempre scegliere $R_0 < \infty$ per il quale risulti $Q(U) < Q$ e si può osservare che per $R_0 \to 0$, risulta $Q(U) \to N = m + n$.

In [25] Garofalo e Nhieu provano alcune disuguaglianze di tipo Sobolev-Poincarè facendo uso della dimensione locale omogenea, per campi soddisfacenti ipotesi abbastanza generali. Essi assumono, infatti, che i campi siano localmente Lipschitziani su $\mathbb{R}^N$ e che generino una distanza d di Carnot-Carathéodory, soddisfacente le due seguenti proprietà:

Ipotesi. *Per ogni insieme $U \in \mathbb{R}^N$ con* $\mathrm{diam}(U) < \infty$*, esistono costanti $C_1, C_2 > 0$, $0 < R_0 < \infty$, ed $\alpha \geq 1$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $0 < R < R_0$, si abbiano le seguenti:*

(H.1) $|B(x, 2R)| \leq C_1 |B(x, R)|$

(H.2) *Per ogni funzione Lipschitziana u in $B(x, \alpha R)$, vale la seguente disuguaglianza di Poincarè debole 1-1:*

$$|\{x \in B : |u(x) - u_B| > \lambda\}| \leq \frac{C_2}{\lambda} R \int_{\alpha B} |Xu(y)| \mathrm{d}y \quad \forall \lambda > 0$$

ove u_B denota la media $\frac{1}{|B|}\int_B u dx$ di u su B.

Osserviamo subito che fanno parte della precedente classe tutti i sistemi di campi di tipo Hormander e, quindi, in particolare i sistemi di generatori di gruppi di Carnot. Rientrano nel caso trattato da Garofalo e Nhieu anche i nostri campi $X_j = \lambda_j \partial_j$. Infatti, come già osservato, essi soddisfano la (H.1), e la (H.2) è provata nella forma forte per gli X_j in [20]. Il risultato dimostrato in [25] è il seguente:

Teorema 1.2.9. *(*Disuguaglianza di Sobolev-Poincarè*) Supponiamo che valgano* (H1) *e* (H2) *e sia $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato di dimensione locale omogenea $Q := Q(U) > 2$. Allora, esiste $C = C(C_1, C_2, \alpha) > 0$ tale che, per ogni sfera $B = B(x, r)$ con centro $x \in U$ e raggio $0 < r < R_0$, vale la seguente:*

$$\left(\fint_B |u - u_B|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \leq C\, r \left(\fint_B |Xu|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

per $2 \leq q \leq 2Q/(Q-2)$, per ogni $u \in C^1(B)$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [25, coroll. 1.6]. □

Dalla precedente disuguaglianza di Sobolev-Poincarè si deduce il seguente:

Teorema 1.2.10. *Sia $\beta > 0$ fissato. Nelle ipotesi del teorema precedente, se $B = B(x, r)$ è una d-sfera, $B \subset U$, con $r < R_0$, allora, per ogni $u \in C^1(B)$ verificante*

$$|E| := \{x \in B : u(x) = 0\}| \geq \beta |B|,$$

vale la disuguaglianza

$$\left(\fint_B |u|^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \leq C\, r \left(\fint_B |Xu|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

per $2 \leq q \leq 2Q/(Q-2)$*, con* C *dipendente da* β *e dalle costanti in* (H1) *e* (H2)*.*

Dimostrazione. Essendo $u_B = |B|^{-1} \int_B u$, risulta

$$\begin{aligned} |u_B| &= |E|^{-1} \int_E |u_B - u| \ \leq \beta^{-1} |B|^{-1} \int_B |u_B - u| \\ &\leq \beta^{-1} |B|^{-1} \left(\int_B |u_B - u|^q \right)^{1/q} \cdot |B|^{1/q'} \\ &= \beta^{-1} \left(\fint_B |u_B - u|^q \right)^{1/q} \end{aligned}$$

da cui, usando la disuguaglianza triangolare e il risultato del teorema precedente, si ha

$$\begin{aligned} \left(\fint_B |u|^q \right)^{1/q} &\leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B |u - u_B|^q \right)^{1/q} + \left(\frac{1}{|B|} \int_B |u_B|^q \right)^{1/q} \\ &= \left(\fint_B |u - u_B|^q \right)^{1/q} + |u_B| \\ &\leq C'_\beta \left(\fint_B |u - u_B|^q \right)^{1/q} \leq C_\beta \, r \left(\fint_B |Xu|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

ovvero la tesi. □

Dal teorema appena dimostrato segue facilmente la seguente disuguaglianza di Sobolev per le sfere:

Teorema 1.2.11. *(*Disuguaglianza di Sobolev*). Sia* B *una* d*-sfera come nel precedente. Allora, per ogni* $u \in C_0^1\left(\frac{1}{2}B\right)$*, si ha*

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_{1/2B} |u|^q \, \mathrm{d}x \right)^{1/q} \leq Cr \left(\frac{1}{|B|} \int_{1/2B} |Xu|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

per $2 \leq q \leq 2Q/(Q-2)$*, ove la costante* C *dipende solo dalle costanti in* (H1) *e* (H2)*.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 1.2.10 alla sfera B, tenendo conto del fatto che, dalla proprietà di doubling, segue immediatamente che $|B - (1/2)B| \simeq |B|$. □

Compattezza. Concludiamo questa parentesi dedicata alle disuguaglianze di immersione di tipo-Sobolev per sistemi di campi vettoriali localmente Lipschitziani, enunciando alcuni teoremi di compattezza che risultano essere molto utili nelle applicazioni.
Sia $X = (X_1, \ldots, X_m)$ un sistema di campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$ soddisfacenti le ipotesi (H1) e (H2) sopra introdotte. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e $Q = Q(\Omega) \geq N$ la sua dimensione (locale) omogenea, secondo la definizione 1.2.18. Allora vale il seguente teorema, per la cui dimostrazione si veda ad esempio [25, Teor.1.28]:

Teorema 1.2.12. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di dimensione locale omogenea Q con $\operatorname{diam}\Omega < \frac{R_0}{2}$. Allora, posto $2^* = 2Q/(Q-2)$, si hanno i seguenti embedding:*

(i) se $Q > 2$ e $1 \leq q < 2^*$, l'embedding $\overset{o}{W}{}^{1,2}_X(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è compatto;

(ii) se $Q = 2$ e $1 \leq q < \infty$, l'embedding $\overset{o}{W}{}^{1,2}_X(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è compatto.

Si osservi che il precedente vale senza alcuna restrizione sul diametro di Ω che non sia $\operatorname{diam}\Omega < \infty$ nei casi in cui la proprietà di duplicazione (1.2.17) vale globalmente, come ad esempio nel caso dei campi da noi esaminati in questa sezione.

1.2.1 La soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ con polo nell'origine

In questa sezione descriviamo la soluzione fondamentale dell'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$ avente polo nell'origine (si veda, ad es. [23]).
Considerata la funzione

$$d(x,y) = \left(|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2|y|^2\right)^{1/2(\alpha+1)} \tag{1.2.19}$$

d risulta essere una *norma δ_λ-omogenea* su $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^m_y$, ovvero

i) $d \geq 0$, $d(x,y) = 0$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$

ii) $d \circ \delta_\lambda = \lambda d \quad \forall\, \lambda > 0$.

Proveremo che la funzione

$$\Gamma(x,y) = \frac{C_{\alpha,Q}}{d(x,y)^{Q-2}} \tag{1.2.20}$$

è una soluzione fondamentale di $-\mathcal{L}$ con polo in $(x,y) = (0,0)$.

Nel seguito sarà utile riguardare $\mathcal{L}$ come un operatore in forma di divergenza. A questo scopo, si consideri la matrice $N \times N$:

$$A = \begin{pmatrix} I_{\mathbb{R}^m} & 0 \\ 0 & |x|^{2\alpha} I_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix}$$

Allora

$$\mathcal{L} = \operatorname{div}(A\nabla)$$

dove div e ∇ sono gli usuali operatori di divergenza e gradiente in $\mathbb{R}^N$. Per una funzione u in $\mathbb{R}^N$, denotato con X il sistema di campi definito nella (1.2.3) risulta:

$$|Xu|^2 = A\nabla u \cdot \nabla u = |\nabla_x u|^2 + |x|^{2\alpha} |\nabla_y u|^2$$

Un facile calcolo mostra che, se $f \in C^2(0, +\infty)$ e definiamo $u(x,y) = f(d(x,y))$, ove d è data dalla (1.2.19), allora

$$\mathcal{L}u = f'(d)\mathcal{L}d + f''(d)|Xd|^2$$

da cui, calcolando $\mathcal{L}d$ e posto

$$\psi_\alpha = |Xd|^2 = \frac{|x|^{2\alpha}}{d(x,y)^{2\alpha}}$$

si ottiene la seguente formula

$$\mathcal{L}u = \psi_\alpha \left(f''(d) + \frac{Q-1}{d} f'(d) \right)$$

per funzioni $u = f(d)$. Questa notevole formula, analoga a quella vista per i sublaplaciani su funzioni "radiali", mostra che la funzione $u = d^{2-Q}$ è soluzione di $\mathcal{L}u = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\}$.
Da quest'ultima proprietà si ottiene che $\Gamma = C\, d^{2-Q}$ è una soluzione fondamentale di $-\mathcal{L}$ con singolarità nell'origine, tenuto conto del seguente risultato:

Proposizione 1.2.13. *Se d è una norma δ_λ-omogenea tale che $\mathcal{L}d^{2-Q} = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, allora $\exists\, C > 0$ tale che $\Gamma = C\, d^{2-Q}$ verifica $\mathcal{L}\Gamma = -\delta_0$.*

Dimostrazione. Osserviamo, innanzitutto, che $\Gamma \in L^1_{loc}$, essendo $\Gamma = O(d^{2-Q})$. Dimostriamo che esiste $C > 0$ tale che, posto $\Gamma = C\, d^{2-Q}$, risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma \mathcal{L}\phi \, \mathrm{d}\xi = -\,\phi(0) \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Valutiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma \mathcal{L}\phi \,\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{d(\xi)>\varepsilon} \Gamma \mathcal{L}\phi \,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{d>\varepsilon} \phi \mathcal{L}\Gamma \; + \int_{d=\varepsilon} \Gamma < A\nabla\phi, \nu > \,\mathrm{d}\sigma \; - \int_{d=\varepsilon} \phi < A\nabla\Gamma, \nu > \,\mathrm{d}\sigma \right) \tag{1.2.21}$$

Ora, il primo dei tre integrali nel secondo membro della precedente è nullo per l'armonicità di Γ fuori dall'origine; restano da valutare, dunque, i due integrali di superficie.
Posto $I_\varepsilon^{(1)} = \int_{d=\varepsilon} \Gamma < A\nabla\phi, \nu > \,\mathrm{d}\sigma$ e $I_\varepsilon^{(2)} = \int_{d=\varepsilon} \phi < A\nabla\Gamma, \nu > \,\mathrm{d}\sigma$, si prova che

$$I_\varepsilon^{(1)} \to 0 \quad \text{per } \varepsilon \to 0 \tag{1.2.22}$$

e

$$I_\varepsilon^{(2)} \to C'\phi(0) \quad \text{per } \varepsilon \to 0 \tag{1.2.23}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
|I_\varepsilon^{(1)}| &\le \int_{d=\varepsilon} \Gamma| < A\nabla\phi, \nu > |\,\mathrm{d}\sigma \\
&\le C\,\varepsilon^{2-Q} \int_{d=\varepsilon} | < A\nabla\phi, \frac{\nabla d}{|\nabla d|} > |\,\mathrm{d}\sigma \qquad (\text{essendo } \nu = -\frac{\nabla d}{|\nabla d|}) \\
&\le C\,\varepsilon^{2-Q} \int_{d=\varepsilon} |X\phi||Xd|\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{|\nabla d|} \\
&\le C\,\varepsilon^{2-Q} \sup|X\phi| \cdot \sup_{d=1}|Xd| \int_{d=\varepsilon} \frac{1}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

e poichè

$$\begin{aligned}
\int_{d=\varepsilon} \frac{1}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_0^\varepsilon \left(\int_{d=t} \frac{1}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_{d\le\varepsilon} \mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\,\varepsilon^Q \int_{d\le 1} \mathrm{d}\xi = m_0 Q \varepsilon^{Q-1}
\end{aligned}$$

si ha che $|I_\varepsilon^{(1)}| \le C\,\varepsilon$ e quindi la (1.2.22).

Passiamo, ora, a valutare $I_\varepsilon^{(2)}$. Usando il fatto che $\nabla\Gamma = C(2-Q)d^{1-Q}\nabla d$ si ha:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{(2)} &= -\int_{d=\varepsilon} \phi < A\nabla\Gamma, \frac{\nabla d}{|\nabla d|} > \,\mathrm{d}\sigma \\ &= -C(2-Q)\varepsilon^{1-Q} \int_{d=\varepsilon} \phi < A\nabla d, \nabla d > \frac{1}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma \\ &= -C(2-Q)\varepsilon^{1-Q} \int_{d=\varepsilon} K \frac{\phi}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

ove si è posto $K =< A\nabla d, \nabla d >$, funzione δ_λ-omogenea di grado 0. Scomponendo come segue

$$\int_{d=\varepsilon} K \frac{\phi}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma = \phi(0) \int_{d=\varepsilon} K \frac{1}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma \, + \int_{d=\varepsilon} K \frac{(\phi - \phi(0))}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma$$

e valutando il primo dei due integrali a secondo membro della precedente, grazie alla formula della coarea, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{d=\varepsilon} K \frac{1}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma \, &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_0^\varepsilon \left(\int_{d=t} \frac{K}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_{d\le\varepsilon} K \mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\, \varepsilon^Q \int_{d\le 1} K \mathrm{d}\xi = m_1 Q \varepsilon^{Q-1} \end{aligned}$$

da cui

$$I_\varepsilon^{(2)} = C(Q-2)\,(Q\, m_1 \phi(0) + o(1))$$

Quindi, per $\varepsilon \to 0$

$$I_\varepsilon^{(2)} \longrightarrow CQ(Q-2)\, m_1 \phi(0)$$

da cui si deduce la tesi per $C^{-1} = Q(Q-2) \int_{d\le 1} K \,\mathrm{d}\xi$. □

Osservazione 1.2.14. Dall'invarianza dell'operatore $\mathcal{L}$ rispetto alle traslazioni euclidee nella variabile $y \in \mathbb{R}^n$, segue che $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$, la funzione

$$\Gamma(x, y - y_0) = C_{\alpha,Q}\, d(x, y - y_0)^{2-Q}$$

è una soluzione fondamentale di $-\mathcal{L}$ con polo in $(0, y_0)$.

Osservazione 1.2.15. Se $\alpha = 1$, $n = 1$ e $m = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, allora la funzione Γ sopra definita (con $Q = 2k + 2$), a meno di un riscalamento in y di un fattore 4, coincide con la soluzione fondamentale di $-\Delta_{\mathbb{H}^k}$ trovata da Folland.

1.2.2 Esistenza e stime di integrabilità per le funzioni di Green di $\mathcal{L}$

Dedichiamo questa sezione allo studio delle funzioni di Green associate all'operatore $\mathcal{L}$.
Per ottenere esistenza e stime per le funzioni di Green si userà il metodo delle cosiddette "funzioni di Green approssimate". Questo metodo, introdotto da Grüter e Widman in [29] per operatori uniformemente ellittici a coefficienti non regolari, ovvero per operatori del tipo:

$$Lu = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)$$

con matrice dei coefficienti $A = (a_{ij})$ verificante:

$$\lambda|\xi|^2 \leq < A\xi, \xi > \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

è stato successivamente utilizzato come utile strumento di indagine in vari casi ellittico-degeneri (si confrontino, ad esempio, i lavori [9], [8], [42], [47]).
Ad esempio, Chanillo e Wheeden in [9] trattano il caso degli operatori degeneri del tipo:

$$Lu = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)$$

con matrice dei coefficienti $A = (a_{ij})$ verificante:

$$w(x)|\xi|^2 \leq < A\xi, \xi > \leq v(x)|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

per opportuni pesi v e w.
Cancelier e Xu [8], invece, usando lo stesso approccio, dimostrano l'esistenza delle funzioni di Green per l'operatore

$$Lu = \sum_{i,j} X_j^*(a_{ij}(x)X_i u)$$

ove $X = (X_1, \ldots, X_m)$ è un sistema di campi C^∞ di tipo Hormander, X_j^* denota l'aggiunto formale di X_j, e i coefficienti a_{ij} sono misurabili, limitati, simmetrici e uniformemente ellittici. Il loro risultato, quindi, generalizza il teorema di Bony sull'esistenza della funzione di Green G associata ad operatori di Hormander $H = \sum_j X_j^* X_j$ (si veda [5]).
In [42] viene trattato il caso di operatori del tipo

$$Lu = \sum_{i,j} X_j^*(a_{ij}(x)X_i u)$$

dove gli X_j sono campi C^∞ di tipo Hormander, X_j^* denota l'aggiunto formale di X_j, e la matrice dei coefficienti $A = a_{ij}$ soddisfa la condizione

$$c^{-1}\, w(x)|\xi|^2 \leq < A\xi, \xi > \leq c\, w(x)|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$$

con w peso opportuno.
Infine, Salinas in [47] studia il problema per l'operatore

$$Lu = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)$$

dove la matrice $A = a_{ij}$ è simmetrica, misurabile e soddisfa la seguente condizione:

$$v(x)\sum_{i=1}^N \lambda_i^2(x)\xi_i^2 \;\leq\; \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \;\leq\; w(x)\sum_{i=1}^N \lambda_i^2(x)\xi_i^2$$

ove le funzioni λ_j soddisfano esattamente le ipotesi introdotte da Franchi e Lanconelli per i coefficienti dei campi trattati in [19], da noi precedentemente richiamate, e le condizioni sui pesi v e w sono stabilite in termini della geometria indotta dai campi.
I nostri operatori rientrano, quindi, nella classe studiata da Salinas per pesi v e w identicamente uguali a costanti positive. Il metodo delle *funzioni di Green approssimate* ci consente di derivare l'esistenza e alcune significative stime per la funzione di Green di una d-sfera S, quando il polo appartiene ad $\frac{1}{2}S$.

Funzioni di Green approssimate per $\mathcal{L}$. Denoteremo con $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ lo spazio ottenuto come completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $u \mapsto \|Xu\|_2$. Per dimostrare l'esistenza e studiare le proprietà di sommabilità delle funzioni di Green relative all'operatore $\mathcal{L}$, si studia preliminarmente il seguente problema "approssimante".
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$; per $y \in \Omega$ e $\delta > 0$ sufficientemente piccolo tale che $Q_\rho = Q(y,\rho) \subset \Omega$, si studiano le soluzioni deboli $G_y^\rho \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ del problema

$$a(G_y^\rho, \varphi) \equiv \int_\Omega < XG_y^\rho(x), X\varphi(x) > \mathrm{d}x = \fint_{Q(y,\rho)} \varphi(x)\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega) \tag{1.2.24}$$

G_y^ρ è chiamata *funzione di Green ρ-approssimata di $\mathcal{L}$ con polo in y.*

L'esistenza e l'unicità di una funzione $G_y^\rho \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ per cui valga la (1.2.24) è assicurata dal teorema di rappresentazione di Riesz, poichè la mappa

$$\ell(\varphi) = \fint_{Q(y,\rho)} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

è un funzionale lineare continuo su $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$.
Infatti, grazie alla disuguaglianza di Sobolev, risulta:

$$\Big| \fint_{Q_\rho} \varphi \Big| \le \frac{1}{|Q_\rho|} \int_{Q_\rho} |\varphi| \le \frac{1}{|Q_\rho|^{1/2^*}} \|\varphi\|_{2^*} \le C\,\|X\varphi\|_2$$

Vediamo, ora, alcune proprietà soddisfatte dalla funzione G_y^ρ.

Proposizione 1.2.16. *G_y^ρ è non negativa su Ω.*

Dimostrazione. Poichè $|G_y^\rho| \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$, essa può essere scelta come funzione test nella definizione di G_y^ρ, per cui si ha che:

$$a(G_y^\rho, G_y^\rho) = \fint_{Q(y,\rho)} G_y^\rho \le \fint_{Q(y,\rho)} |G_y^\rho| = a(G_y^\rho, |G_y^\rho|)$$

Esiste, quindi, $k \ge 1$ tale che

$$a(G_y^\rho, G_y^\rho) = k^{-1} a(G_y^\rho, |G_y^\rho|)$$

quindi

$$a(G_y^\rho, G_y^\rho) = a(G_y^\rho, k^{-1}|G_y^\rho|) \tag{1.2.25}$$

e

$$a(k^{-1}|G_y^\rho|, k^{-1}|G_y^\rho|) = k^{-2} a(G_y^\rho, G_y^\rho) \le a(G_y^\rho, k^{-1}|G_y^\rho|) \tag{1.2.26}$$

Sottraendo la (1.2.25) dalla (1.2.26), si ha:

$$0 \le a(k^{-1}|G_y^\rho| - G_y^\rho, k^{-1}|G_y^\rho| - G_y^\rho) \le 0 \tag{1.2.27}$$

per cui risulta $k^{-1}|G_y^\rho| - G_y^\rho = 0$, da cui $k = 1$ e $G_y^\rho \ge 0$. $\square$

La seguente proposizione contiene una interessante stima di integrabilità uniforme per G_y^ρ.

Proposizione 1.2.17. *$\exists\,\rho_0 > 0$ e $C > 0$, C indipendente da y, tale che, per ogni $0 < \rho \le \rho_0$, risulta $\|G_y^\rho\|_{L_w^{\frac{Q}{Q-2}}(\Omega)} \le C$.*

Dimostrazione. Ricordando che la norma L^p_w, $1 < p < \infty$, definita in (2.1.6) è equivalente a

$$\|f\|_{L^p_w(\Omega)} = \sup_{t>0} t|\{x \in \Omega \,|\, |f(x)| > t\}|^{1/p},$$

stimiamo la funzione di distribuzione di G_y^ρ. Usando $\varphi(x) = \max\{0, 1/t - 1/G_y^\rho\}$, $t > 0$, come funzione test nella (1.2.24) e posto $\Omega_t = \{x \in \Omega | \, |f(x)| > t\}$, abbiamo

$$a(G_y^\rho, \varphi) = \int_{\Omega_t} < XG_y^\rho, XG_y^\rho > (G_y^\rho)^{-2} = \fint_{B_\rho} \varphi \le 1/t.$$

Ora, tenendo conto che $X_j(\log G_y^\rho) = (G_y^\rho)^{-1} X_j G_y^\rho$ su Ω_t $\forall j = 1, \dots N$, e applicando la disuguaglianza di Sobolev alla funzione

$$v(x) = \max\{0, \log G_y^\rho(x) - \log t\} \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$$

si ottiene che

$$\left[\int_{\Omega_t} (\log \frac{G_y^\rho}{t})^{\frac{2Q}{Q-2}}\right]^{\frac{Q-2}{Q}} \le C\,t^{-1}$$

ove C è la miglior costante nella disuguaglianza di Sobolev relativa al sistema di campi X.
Si ha, allora:

$$\begin{aligned}(\log 2)^2 |\Omega_{2t}|^{\frac{Q-2}{Q}} &\le \left[\int_{\Omega_{2t}} (\log \frac{G_y^\rho}{t})^{\frac{2Q}{Q-2}}\right]^{\frac{Q-2}{Q}} \\ &\le \left[\int_{\Omega_t} (\log \frac{G_y^\rho}{t})^{\frac{2Q}{Q-2}}\right]^{\frac{Q-2}{Q}} \\ &\le C\,t^{-1}\end{aligned}$$

Dunque, $\forall s > 0$, si ottiene:

$$s|\Omega_s|^{\frac{2Q}{Q-2}} \le C,$$

ovvero la tesi. $\square$

Facciamo notare che la precedente stima, uniforme rispetto a ρ e al polo y, oltre a costituire il primo fondamentale passo nella costruzione della funzione di Green, può essere direttamente utilizzata per ottenere stime L^∞ per le soluzioni del problema di Dirichlet associato all'operatore $\mathcal{L}$, come vedremo alla fine di questo capitolo.

Stime per XG^ρ_y. Procediamo, ora, col derivare delle stime di integrabilità per XG^ρ_y, quando Ω è una sfera per la distanza di controllo d. Si prova, in particolare, una stima per la norma $\|XG^\rho_y\|_{L^s}$ uniforme in ρ per $s < Q/(Q-1)$, come enunciato nella seguente proposizione:

Proposizione 1.2.18. *Sia $S = S(x_0, R)$ una d-sfera in $\mathbb{R}^N$, con $N > 2$. Allora per ogni $0 < q < Q/(Q-1)$ e per q.o. $y \in \frac{1}{2}S$, esiste $C = C(q, y, x_0, R) > 0$ tale che*

$$\int_S |XG^\rho_y|^q \leq C \qquad \forall\ 0 < \rho < R/2a.$$

La dimostrazione della proposizione precedente necessita di alcuni risultati preliminari, che sono contenuti nei seguenti lemmi. Il primo lemma fornisce una stima di XG^ρ_y in termini di G^ρ_y.

Lemma 1.2.19. *(di tipo Caccioppoli) Sia $S = S(x_0, R)$ una d-sfera. Allora esiste $C > 0$, C indipendente da y, r e ρ, tale che*

$$\int_{S\setminus Q(y,r)} |XG^\rho_y|^2 \leq \frac{C}{r^2} \int_{Q(y,r)\setminus Q(y,r/2)} (G^\rho_y)^2$$

per ogni $y \in \frac{1}{2}S$, $0 < r < R/2a$ e $0 < \rho < r/2$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 4.2 in [9] e si basa sull'esistenza di opportune funzioni di troncatura, dimostrata da Franchi e Lanconelli in [20] per le δ-sfere Q. Grazie a questo risultato, possiamo considerare una funzione di cut-off siffatta:

$$\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ t. c. } \eta \equiv 0 \text{ su } Q(y, r/2), \eta \equiv 1 \text{ fuori da } Q(y,r) \text{ e } |X\eta| \leq C/r.$$

Usando la funzione $\varphi = G_y^\rho \eta^2 \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(S)$ come funzione test nella definizione di G_y^ρ, risulta, per $\rho < r/2$:

$$0 = \fint_{B_\rho} G_y^\rho \eta^2 = \int_S < XG_y^\rho, X(G_y^\rho \eta^2) >$$
$$= \int |XG_y^\rho|^2 \eta^2 \ + \ 2 \int < G_y^\rho XG_y^\rho, \eta X\eta >$$

Dunque

$$\int |XG_y^\rho|^2 \eta^2 \ = \ -2 \int < X\,G_y^\rho, X\eta > \eta\, G_y^\rho$$

da cui

$$\int |XG_y^\rho|^2 \eta^2 \ \leq \varepsilon \int |XG_y^\rho|^2 \eta^2 \ + \ \frac{1}{\varepsilon} \int |X\eta|^2 (G_y^\rho)^2 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ora, scegliendo ad es. $\varepsilon = 1/2$ e ricordando che $X\eta \equiv 0$ in $Q(y, r/2)$ e fuori da $Q(y, r)$ e $|X\eta| \leq c/r$ in $Q(y, r) \setminus Q(y, r/2)$, si ottiene

$$\int |XG_y^\rho|^2 \eta^2 \ \leq \frac{C}{r^2} \int_{Q(y,r)\setminus Q(y,r/2)} (G_y^\rho)^2$$

e dunque

$$\int_{S\setminus Q(y,r)} |XG_y^\rho|^2 \ \leq \int_{S\setminus Q(y,r/2)} |XG_y^\rho|^2 \eta^2 \ \leq \frac{C}{r^2} \int_{Q(y,r)\setminus Q(y,r/2)} (G_y^\rho)^2$$

ove C è indipendente da y, r e ρ. □

Lemma 1.2.20. *Sia $S = S(x_0, R)$ una d-sfera. Allora per q.o. $y \in \frac{1}{2}S$, esiste $C = C(y, x_0, R) > 0$ tale che*

$$\sup_{r/2<d(x,y)<r} G_y^\rho(x) \leq C \min\left\{ \int_r^R \frac{t^2}{|S(y,t)|} \frac{\mathrm{d}t}{t} \, , \, \int_r^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right\} \quad (1.2.28)$$

per ogni $0 < r < R/2$ e $0 < \rho < r/4a$, ove si è posto $\sigma = Q/(Q-2)$.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che

$$\sup_{r/2<d(x,y)<r} G_y^\rho(x) \leq C \int_r^R \frac{t^2}{|S(y,t)|} \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (1.2.29)$$

Infatti, dalla proprietà di doubling di d, essendo $|S(x,tr)| \geq Ct^Q|S(x,r)|$ per ogni $0 < t \leq 1$, risulta:

$$\left(\frac{t}{a^2R}\right)^Q \leq \frac{|S(y,t)|}{|S(y,R)|} \quad 0 < t \leq R,$$

da cui

$$\frac{t^2}{|S(y,t)|} \leq \frac{C_R}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \quad \text{per } 0 < t \leq R,$$

che implica la restante parte della tesi

$$\sup_{r/2<d(x,y)<r} G_y^\rho(x) \leq C \int_r^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Procediamo, dunque, col dimostrare la (1.2.29).
Consideriamo dapprima il caso $y = x_0$, cioè proviamo la stima (1.2.29) per la funzione di Green di S avente polo coincidente col centro di S. Il caso generale si deriva come segue.
Se $y \in (1/2)S$, allora $S(x_0,R) \subset S(y,2R)$, e quindi, per la proprietà di monotonia delle funzione di Green rispetto al dominio, denotata con G_r^ρ la funzione di Green di $S(y,r)$ con polo in y, risulta

$$G^\rho \leq G_{2R}^\rho \ \text{ su } \ S(x_0,R).$$

Dunque, se la stima vale per funzioni di Green di sfere aventi polo coincidente col centro della sfera e quindi per G_{2R}^ρ, si ottiene:

$$\begin{aligned}\sup_{r/2<d(x,y)<r} ess\ G^\rho(x) &\leq \sup_{r/2<d(x,y)<r} ess\ G_{2R}^\rho(x) \leq C \int_r^{2R} \frac{t^2}{|S(y,t)|}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= C\left(\int_r^R + \int_R^{2R}\right) \leq C \int_r^R, \qquad \forall 0 < \rho < r/4a\end{aligned}$$

poichè per la doubling $\displaystyle\int_R^{2R} \approx \int_{R/2}^R \leq \int_r^R$.
Quindi possiamo restringerci a considerare solo funzioni di Green di sfere con polo coincidente col centro della sfera.
Sia $s > 0$; per comodità useremo la notazione $S_s = S(y,s)$ e $G_s^\rho \equiv$ funzione di Green di $S(y,s)$ con polo y.

Sia $r < R/2$ ed $m \in \mathbb{N}$ tale che $(3/2)^{m-1}r < R < (3/2)^m r$. Allora, su $S_r \setminus S_{r/2}$ risulta:

$$G_R^\rho \leq G_{r(3/2)^m}^\rho = G_r^\rho + \sum_{j=1}^m \left[G_{r(3/2)^j}^\rho - G_{r(3/2)^{j-1}}^\rho \right] \tag{1.2.30}$$

Stimiamo ogni termine nel lato destro di (1.2.30).
Per quanto riguarda il primo termine G_r^ρ, si prova che:

$$\sup_{S_r \setminus S_{r/2}} ess\; G_r^\rho(x) \leq C \frac{r^2}{|S(y,r)|} \tag{1.2.31}$$

Per gli altri termini in (1.2.30), si può provare, adattando la dimostrazione del Lemma 2.7 in [9], che

$$\sup_{S_s} (G_{(3/2)s}^\rho - G_s^\rho) \leq C \frac{s^2}{|S(y,s)|}.$$

In conclusione, dalla (1.2.30) e dalla doubling, segue che

$$\sup_{S_r \setminus S_{r/2}} ess\; G_R^\rho \leq C \sum_{j=0}^m \frac{\left((3/2)^j r\right)^2}{|S_{(3/2)^j r}|}, \quad r < R/2$$

ovvero la tesi. $\square$

Lemma 1.2.21. *Sia $S = S(x_0, R)$ una d-sfera in $\mathbb{R}^N$, con $N > 2$. Allora, per q.o. $y \in \frac{1}{2}S$, esiste $C = C(y, x_0, R) > 0$ tale che*

$$\int_{S \setminus Q(y,r)} |XG_y^\rho|^2 \leq C \int_{r/2a}^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

per ogni $0 < r < R/2a$ e $0 < \rho < R/2a$, ove $\sigma = Q/(Q-2)$.

Dimostrazione. Sia $0 < \rho < r/8a^2$; allora, usando i lemmi precedenti si ha

$$\begin{aligned}
\int_{S\setminus Q(y,r)} |XG_y^\rho|^2 &\le \frac{C}{r^2} \int_{Q(y,r)\setminus Q(y,r/2)} (G_y^\rho)^2 \\
&\le \frac{C}{r^2}\,|Q(y,r)| \left(\sup_{r/2<\delta(y,x)<r} G_y^\rho(x) \right)^2 \\
&\le \frac{C}{r^2}\,|Q(y,r)| \left(\sup_{r/2a<d(y,x)<ar} G_y^\rho(x) \right)^2 \\
&\le \frac{C}{r^2}\,|Q(y,r)| \left(\sum_{j=0}^{j\le\log_2 a^2} \sup_{\frac{ar}{2^{j+1}}<d(y,x)<\frac{ar}{2^j}} G_y^\rho(x) \right)^2 \\
&\le \frac{C}{r^2}\,|Q(y,r)| \left(\min \int_{r/2a}^R \frac{t^2}{|S(y,t)|}\frac{\mathrm{d}t}{t}\,,\ \int_{r/2a}^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}}\frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^2 \\
&\le \frac{C}{r^2}\,|Q(y,r)| \left(\int_{r/2a}^R \frac{t^2}{|S(y,t)|}\frac{\mathrm{d}t}{t} \right) \left(\int_{r/2a}^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}}\frac{\mathrm{d}t}{t} \right)
\end{aligned} \tag{1.2.32}$$

ove la limitazione $0 < \rho < r/8a^2$ è servita per utilizzare il Lemma 1.2.20 nella (1.2.32). D'altra parte, per le proprietà della metrica d, risulta

$$\begin{aligned}
\int_{r/2a}^R \frac{t^2}{|S(y,t)|}\frac{\mathrm{d}t}{t} &\le \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\frac{2^j r}{2a}}^{\frac{2^{j+1} r}{2a}} \frac{t^2}{|S(y,t)|}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\le \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2^j r}{2a}\right)^2 \frac{1}{|S(y,\frac{2^j r}{a})|} \\
&\le C\frac{r^2}{|S(y,r)|} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j(2-N)} \\
&= C\frac{r^2}{|S(y,r)|}
\end{aligned} \tag{1.2.33}$$

ove si è usato che $|S(y,\dfrac{2^j r}{a})| \ge (2^j)^N |S(y,\dfrac{r}{a})|$, e l'ipotesi $N > 2$.
Dalle (1.2.32) e (1.2.33) si ottiene esattamente la tesi per ρ nel suindicato intervallo.

Sia, ora, $r/8a^2 < \rho < R/2a$; applicando la disuguaglianza di Sobolev, si ha:

$$\begin{aligned} a(G_y^\rho, G_y^\rho) &= \int_S |XG_y^\rho|^2 = \fint_{Q_\rho} G_y^\rho \le \frac{1}{|Q(y,\rho)|^{1/2\sigma}} \left(\int_S |G_y^\rho|^{2\sigma} \right)^{1/2\sigma} \\ &\le \frac{C}{|Q(y,\rho)|^{1/2\sigma}} \left(\int_S |XG_y^\rho|^2 \right)^{1/2} = \frac{C}{|Q(y,\rho)|^{1/2\sigma}} a(G_y^\rho, G_y^\rho)^{1/2} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_{S\setminus Q(y,r)} |XG_y^\rho|^2 \le a(G_y^\rho, G_y^\rho) &\le \frac{C}{|Q(y,\rho)|^{1/\sigma}} \\ &\le C \left(\frac{|S(y,r)|}{|Q(y,r/8a^2)|} \right)^{1/\sigma} \int_{r/2a}^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{aligned}$$

e dunque la tesi per il restante intervallo di ρ. $\square$

Dimostrazione della Proposizione 1.2.18. Sia $y \in \frac{1}{2}S$ e $0 < \rho < R/2a$. Valutiamo la funzione di distribuzione di XG_y^ρ. Dal Lemma 1.2.21 segue che

$$\begin{aligned} |\{x \in S \mid |XG_y^\rho| > s\}| &= |\{x \in S \mid |XG_y^\rho|^2 > s^2\}| \\ &\le \frac{1}{s^2} \int_{S\setminus Q(y,r)} |XG_y^\rho|^2 \ + |Q(y,r)| \\ &\le C \left(\frac{1}{s^2} \int_{r/2a}^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \ + |Q(y,r)| \right) \end{aligned}$$

per q.o. $y \in \frac{1}{2}S$, per ogni $r \in (0, R/2a)$ ed $s > 0$, dove $C = C(y,S)$. Ora, usando le proprietà di d e di δ, si ha che

$$\begin{aligned} |\{x \in S \mid |XG_y^\rho| > s\}| &\le C \left(|Q(y,r)| \ + \frac{1}{s^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\frac{2^j r}{2a}}^{\frac{2^{j+1} r}{2a}} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right) \\ &\le C \left(|Q(y,r)| \ + \frac{1}{s^2 |S(y,r)|^{1/\sigma}} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-Nj/\sigma} \right) \\ &\le C \left(|Q(y,r)| \ + \frac{1}{s^2 |Q(y,r)|^{1/\sigma}} \right). \end{aligned}$$

da cui, scegliendo r in modo che $|Q(y,r)| = s^{-\frac{Q}{Q-1}}$, si ottiene

$$|\{x \in S \mid |XG_y^\rho| > s\}| \le C\, s^{-\frac{Q}{Q-1}} \tag{1.2.34}$$

per ogni $s > |Q(y, R/2a)|^{-\frac{Q}{Q-1}}$ (essendo $r < R/2a$), per ogni $r \in (0, R/2a)$ e per q.o. $y \in \frac{1}{2}S$.
Dalla precedente stima segue immediatamente la tesi, poichè, posto $s_0 = |Q(y, R/2a)|^{-\frac{Q}{Q-1}}$ e $q_0 = Q/(Q-1)$ e tenendo conto della stima banale

$$|\{x \in S \mid |XG_y^\rho| > s\}| \leq |S|, \quad \forall\, s > 0$$

si ha che

$$\begin{aligned}\int_S |XG_y^\rho(x)|^q \,\mathrm{d}x &= q\int_0^{+\infty} s^{q-1}|\{x \in S \mid |XG_y^\rho| > s\}|\,\mathrm{d}s \\ &\leq q\int_0^{s_0} s^{q-1}\,|S|\,\mathrm{d}s \;+\; q\,C\int_{s_0}^{+\infty} s^{q-1-q_0}\,\mathrm{d}s \;< \infty\end{aligned}$$

per ogni $q < q_0$. □

Osserviamo che è possibile ottenere anche per XG_y^ρ come per G_y^ρ delle stime di integrabilità uniformi rispetto al polo y. Per la dimostrazione di questo risultato si veda ad esempio [47, Sezione 6].

Esistenza della funzione di Green G_y. I risultati finora ottenuti circa G_y^ρ e XG_y^ρ ci consentono di provare l'esistenza della funzione di Green $G_y(\cdot) = G(y, \cdot)$ di S con polo y. Vale, infatti, il seguente:

Teorema 1.2.22. *Sia S una d-sfera in $\mathbb{R}^N$, $N > 2$. Allora, per q.o. $y \in \frac{1}{2}S$, esiste una funzione non negativa G_y tale che:*

i) $G_y(\cdot) \in X_{t,s}\, \forall t < \frac{Q}{Q-2}$ *e* $\forall s < \frac{Q}{Q-1}$, *dove* $X_{t,s}$ *denota la chiusura di* $Lip_0(S)$ *rispetto alla norma* $\|f\|_{L^t} + \|Xf\|_{L^s}$*;*

ii) $\forall \varphi \in C_0^\infty(S)$ *e per q.o.* $y \in \frac{1}{2}S$ *risulta*

$$\int_S < XG_y(x), X\varphi(x) > \mathrm{d}x = \varphi(y);$$

iii) Se $f \in L^{t'}$, *con* t' *esponente coniugato di* $t < Q/(Q-2)$, *allora la soluzione* u *in* $\overset{o}{\mathcal{D}}{}_X^1(S)$ *del problema*

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u &= f \quad \text{in}\, S \\ \quad u &= 0 \quad \text{su}\, \partial S \end{cases} \tag{1.2.35}$$

verifica

$$u(y) = \int_S G_y(x) f(x) dx \quad \textit{per q.o. } y \in \frac{1}{2}S;$$

iv) $\exists\, C > 0$, *C indipendente da y, tale che* $\|G_y\|_{L_w^{\frac{Q}{Q-2}}(S)} \leq C$.

Dimostrazione. Posto $\sigma = Q/(Q-2)$ ed $s_0 = Q/(Q-1)$, abbiamo finora provato che $G^\rho \in L_t$ uniformemente in ρ e y per $t < \sigma$, e che $XG^\rho \in L_s$ uniformemente in ρ per $s < s_0$. Dunque $G_y^\rho \in X_{t,s}$ e $\{\|G_y^\rho\|_{X_{t,s}(S)}\}$ è uniformemente limitata in ρ per $1 < t < \sigma$ e $1 < s < s_0$ per q.o. $y \in (1/2)S$. Poichè $t, s > 1$, $X_{t,s}$ è riflessivo, per cui esiste una successione $\{\rho_\nu\} \searrow 0$ tale che $\{G^{\rho_\nu}\}$ tende debolmente ad un elemento $G \in X_{t,s}$. Inoltre, scegliendo due successioni $\{t_\nu\} \nearrow \sigma$ e $\{s_\nu\} \nearrow s_0$ ed usando un procedimento diagonale, possiamo scegliere G indipendente da t e da s per $t < \sigma$ e $s < s_0$, i.e. esistono $\{G^{\rho_\nu}\}$ e G tali che

$$G^{\rho_\nu} \rightharpoonup G \ \text{(debolm.) in } X_{t,s},\ \forall\, t < \sigma, s < s_0.$$

Per ogni fissata $\varphi \in C_0^\infty(S)$, $a(\cdot, \varphi)$ è un funzionale lineare continuo su $X_{t,s}$. Infatti se $\varphi \in C_0^\infty(S)$, posto $\Lambda(h) = a(h, \varphi)$, risulta

$$\begin{aligned}|\Lambda(h)| &\leq \int |<Xh, X\varphi>| \ \leq \int |Xh|\,|X\varphi| \\ &\leq C \int_S |Xh|\,\|X\varphi\|_{L^\infty} \ \leq C\,\|X\varphi\|_{L^\infty} (\int_S |Xh|^s)^{1/s} \ \leq C\,\|X\varphi\|_{L^\infty} \|h\|_{X_{t,s}}\end{aligned}$$

Quindi, $a(G_y^{\rho_\nu}, \varphi) \to a(G_y, \varphi)$. Ma poichè

$$a(G_y^{\rho_\nu}, \varphi) = \fint_{Q_{\rho_\nu}} \varphi \ \to \varphi(y) \quad \text{per } \rho \to 0$$

si ha che

$$a(G_y, \varphi) = \varphi(y)$$

ovvero la ii) del teorema.
Ora, si consideri il problema (1.2.35). Ricordando che u è soluzione del problema in $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(S)$ se $u \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(S)$ e verifica la seguente

$$a(u, \varphi) = \int f\varphi \quad \forall \varphi \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(S)$$

possiamo affermare che u esiste ed è unica, grazie al teorema di rappresentazione di Riesz. Infatti, grazie alle proprietà di sommabilità di f, il funzionale

$$\ell(\varphi) = \int f\varphi$$

è un funzionale lineare continuo su $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(S)$, essendo:

$$\begin{aligned} |\ell(\varphi)| &\leq \left(\int_S |f|^{(2^*)'}\right)^{1/(2^*)'} \left(\int_S |\varphi|^{2^*}\right)^{1/2^*} \\ &\leq C \left(\int_S |f|^{(2^*)'}\right)^{1/(2^*)'} \left(\int_S |X\varphi|^2\right)^{1/2} \leq C \, \|\varphi\|_{\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(S)} \end{aligned}$$

Allora, dalla definizione di u e di G^ρ, segue che

$$\fint_{Q_\rho} u \; = a(G^\rho, u) = a(u, G^\rho) = \int fG^\rho \tag{1.2.36}$$

e facendo il limite per $\rho \to 0$ risulta:

$$\fint_{Q_\rho} u \; \to u(y) \quad \text{q.o. } y \tag{1.2.37}$$

mentre

$$\int_S fG^\rho \; \to \int_S f(x)G_y(x)\mathrm{d}x \quad \text{per q.o. } y \in (1/2)S \tag{1.2.38}$$

poichè $G^\rho \rightharpoonup G$ debolmente in $X_{t,s}$ ed $\ell(g) = \int fg$ è un funzionale continuo su $X_{t,s}$, essendo

$$|\ell(g)| \leq \int_S |fg| \; \leq \left(\int_S |f|^{t'}\right)^{1/t'} \left(\int_S |g|^t\right)^{1/t} \leq \left(\int_S |f|^{t'}\right)^{1/t'} \|g\|_{X_{t,s}}$$

Dunque, dalla (1.2.36) per $\rho \to 0$, tenuto conto delle (1.2.37) e (1.2.38) si ottiene la seguente formula di rappresentazione per la soluzione di (1.2.35):

$$u(y) = \int_S G(y,x)f(x)\mathrm{d}x \quad \text{per q.o. } y \in (1/2)S$$

ovvero la iii).
Stimiamo, ora, $\|G_y\|_{L_w^{\frac{Q}{Q-2}}(S)}$.

Posto $\Omega_t = \{x \in S \mid G_y > t\}$ per $t > 0$, $p = \frac{Q}{Q-2}$ e $0 < \varepsilon \le p-1$, per la debole semicontinuità inferiore delle norme L^p, si ha

$$\begin{aligned}\|G\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega_t)} &\le \liminf_{\nu\to 0} \|G^{\rho_\nu}\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega_t)} \\ &\le \liminf_{\nu\to 0} \left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^{1/(p-\varepsilon)} |\Omega_t|^{\varepsilon/p(p-\varepsilon)} \|G^{\rho_\nu}\|_{L^p_w(\Omega_t)} \\ &\le C\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^{1/(p-\varepsilon)} |\Omega_t|^{\varepsilon/p(p-\varepsilon)}\end{aligned}$$

da cui

$$t|\Omega_t|^{1/(p-\varepsilon)} \le \|G\|_{p-\varepsilon,w} \le \|G\|_{p-\varepsilon} \le C\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^{1/(p-\varepsilon)} |\Omega_t|^{\varepsilon/p(p-\varepsilon)}$$

ovvero

$$t|\Omega_t|^{1/p} \le C\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^{1/(p-\varepsilon)}$$

da cui, per $\varepsilon = p-1$:

$$t|\Omega_t|^{1/p} \le C\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

che implica la tesi iv). □

Osservazione 1.2.23. Osserviamo che si sono ottenute stime della funzione di Green G per sfere di centro e raggio qualsiasi. Queste stime risultano essere ottimali per domini intersecanti l'insieme di degenerazione, per i quali la dimensione locale omogenea coincide con la dimensione globale omogenea Q. Possono essere, invece, migliorate per domini discosti dall'insieme $x = 0$ se nel procedimento finora illustrato si usano le disuguaglianze di Sobolev "locali". In tal caso, se Ω è un aperto di dimensione locale omogenea $Q' = Q(\Omega)$, le stime precedentemente ottenute valgono, con Q' al posto di Q, uniformemente per tutte le sfere $S \subset \Omega$ di raggio "sufficientemente" piccolo.
Dunque nel nostro caso, per aperti discosti dall'asse di degenerazione, ove l'operatore è ellittico e la dimensione locale omogenea Q' tende a coincidere per diametri piccoli con la dimensione topologica N, si riottengono al limite delle stime $L_{\frac{N}{N-2},w}$ per la funzione di Green G.

Stime L^∞ per le soluzioni del problema di Dirichlet. A conclusione di questa trattazione, facciamo vedere come l'esistenza delle sole funzioni di Green approssimate e la validità della stima L^p_w uniforme in ρ dimostrata nella Proposizione 1.2.17, possano essere utilizzate per ottenere alcune stime L^∞ per le soluzioni del problema di Dirichlet associato ad $\mathcal{L}$. Dimostriamo, infatti, il seguente risultato:

Proposizione 1.2.24. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ un aperto limitato ed $f \in L^p(\Omega)$ per qualche $p > Q/2$. Allora, esiste ed è unica la soluzione u di $-\mathcal{L}u = f$ in $\overset{o}{D}{}^1_X(\Omega)$, e vale la seguente stima:*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_p|\Omega|^{2/Q-1/p}\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. L'esistenza e l'unicità della soluzione in $\overset{o}{D}{}^1_X(\Omega)$, ovvero di una funzione $u \in \overset{o}{D}{}^1_X(\Omega)$ tale che $a(u,\varphi) = \int_\Omega f\varphi$ per ogni $\varphi \in \overset{o}{D}{}^1_X(\Omega)$, segue dal teorema di rappresentazione di Riesz, essendo a fortiori $f \in L^{(2^*)'}$. Ora, sia G^ρ la funzione di Green approssimata di $\mathcal{L}$ per Ω con polo $y \in \Omega$ e sia $B_\rho = B(y,\rho)$. Allora,

$$⨍_{B_\rho} u = a(G^\rho, u) = a(u, G^\rho) = \int_\Omega fG^\rho$$

e quindi, dalla disuguaglianza di Hölder segue

$$\begin{aligned} |⨍_{B_\rho} u| = |\int_\Omega fG^\rho| &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}(\int_\Omega (G^\rho)^{p'})^{1/p'} \\ &\leq |\Omega|^{2/Q-1/p}\|G^\rho\|_{L_w^{\frac{Q}{Q-2}}(\Omega)}\|f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C|\Omega|^{2/Q-1/p}\|f\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

dove C è una costante indipendente da ρ ed y. Nelle ultime disuguaglianze si è usato il fatto che, poichè $1 < p' < \frac{Q}{Q-2}$, vale la seguente, come verrà richiamato nella (2.1.4) della Proposizione 2.1.2,

$$\int_\Omega (G^\rho)^{p'} \leq C_{p'}|\Omega|^{p'(2/Q-1)+1}\|G^\rho\|^{p'}_{L_w^{\frac{Q}{Q-2}}(\Omega)}$$

e poi si è usata la Proposizione 1.2.17.
Ora, facendo tendere $\rho \to 0$, possiamo concludere che

$$|u(y)| \leq C_p|\Omega|^{2/Q-1/p}\|f\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{q.o. } y \in \Omega.$$

ottenendo così la tesi. $\square$

Capitolo 2

Disuguaglianze di Sobolev con termini di resto per i Sublaplaciani

Introduzione

Oggetto del presente capitolo è lo studio di alcune disuguaglianze di Sobolev con termini di resto per sublaplaciani su gruppi di Carnot. Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ un gruppo di Carnot di dimensione omogenea Q secondo la definizione 1.1.3, e denotiamo con

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{m} X_j^2 \tag{2.0.1}$$

un fissato sublaplaciano su $\mathbb{G}$, con gradiente subellittico corrispondente $X = (X_1, \ldots, X_m)$. Consideriamo la seguente disuguaglianza di Sobolev per la norma L^2 del gradiente subellittico dimostrata da Folland in [16]:

$$\|Xf\|_2^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2, \quad 2^* = 2Q/(Q-2) \tag{2.0.2}$$

valida per tutte le funzioni f con gradiente distribuzionale $Xu \in L^2$ e verificanti la debole condizione di annullamento all'infinito

$$|\{x \in \mathbb{G} \,|\, |f(x)| > a\}| < \infty \quad \forall\, a > 0.$$

La validità della (2.0.2) implica in particolare che se Ω è un qualunque aperto di $\mathbb{G}$, la funzione

$$u \longmapsto \|Xu\|_2 \tag{2.0.3}$$

è una norma su $C_0^\infty(\Omega)$; pertanto, definiamo lo spazio di Folland-Stein $S_0^1(\Omega)$ come il completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla predetta norma.
$S_0^1(\Omega)$ risulta, quindi, uno spazio di Hilbert dotato del prodotto scalare $< u, v >_{S_0^1(\Omega)} = \int_\Omega < Xu, Xv >$.
Denoteremo semplicemente con $S^1(\mathbb{R}^N)$ lo spazio $S_0^1(\mathbb{R}^N)$.
Ricordiamo che la costante ottimale S e i minimizzanti nella (2.0.2) sono noti solo nel caso particolare del gruppo di Heisenberg, ove sono stati determinati da Jerison e Lee in [34] (si veda la Sezione 2.4.1).

Il risultato da noi dimostrato è il seguente: se Ω è un dominio limitato di $\mathbb{G}$, la disuguaglianza (2.0.2) su $S_0^1(\Omega)$ può essere migliorata con l'aggiunta di un termine di resto, in stretta analogia col caso euclideo, ovvero vale la seguente:

$$\|Xf\|_2^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2 + C(\Omega)\|f\|_{p,w}^2 \qquad \forall f \in S_0^1(\Omega) \tag{2.0.4}$$

con $p = Q/(Q-2) = 2^*/2$.
La dimostrazione euclidea, dovuta a Brezis e Lieb [6], può essere imitata eccetto che per l'uso della tecnica di riarrangiamento, che non è utilizzabile in questo contesto. Per questo motivo, è necessario usare un approccio diretto e la costante $C(\Omega)$ da noi ottenuta non risulta dipendere solo dalla misura di Ω, ma anche dalla *capacità subellittica di* Ω. Questa nozione viene illustrata nel paragrafo 2.1.2, mentre la dimostrazione della disuguaglianza (2.0.4) è presentata nella Sezione 2.2. Resta aperto il problema di capire se sia possibile provare una disuguaglianza con $C(\Omega)$ dipendente solo dalla misura di Ω.

Usando la stessa tecnica dimostrativa e in analogia con i risultati in [6], è possibile anche in questo contesto stabilire una disuguaglianza più forte della precedente, con un termine di resto che coinvolge una opportuna norma del gradiente, ovvero:

$$\|Xf\|_2^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2 + D(\Omega)\|Xf\|_{q,w}^2 \qquad \forall f \in S_0^1(\Omega) \tag{2.0.5}$$

con $q = Q/(Q-1)$.
La ragione per cui la (2.0.5) è più forte della (2.0.4) risiede nel fatto che la disuguaglianza di Sobolev ammette un'estensione alle norme deboli, grazie alla disuguaglianza di Young negli spazi L^p-deboli. Questa ed altre proprietà degli spazi di Lebesgue deboli vengono richiamate per comodità di lettura nel paragrafo 2.1.1.

Facciamo, ora, alcune considerazioni di ottimalità.
Nel caso euclideo, la disuguaglianza analoga alla (2.0.4) risulta essere ottimale nell'ambito degli spazi L^p, nel senso che la norma L^p-forte con $p = n/(n-2)$ non è ammissibile come termine di resto. Nel contesto in esame, siamo in grado

di provare lo stesso risultato nel caso particolare del gruppo di Heisenberg, ove la conoscenza esplicita dei minimizzanti di Sobolev ci consente di realizzare espansioni asintotiche alla Brezis-Nirenberg (si veda il paragrafo 2.4.1).

Sempre nel contesto del gruppo di Heisenberg, siamo in grado di dimostrare che la disuguaglianza di Sobolev può essere migliorata non solo sui limitati, ma sull'intero spazio $\mathbb{H}^n$. Proviamo, infatti, che la quantità

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 - S\|f\|_{2^*}^2$$

può essere limitata dal basso in $S^1(\mathbb{H}^n)$ in termini della "distanza" della funzione f dall'insieme dei minimizzanti.
Questo nostro risultato estende al caso Heisenberg il risultato dimostrato in ambito euclideo da Bianchi ed Egnell in [3] ed è oggetto del lavoro [41].

Concludiamo questa premessa, ricordando alcuni problemi aperti riguardanti il tema in esame, alcuni dei quali non hanno ancora trovato risposta nel caso del Laplaciano classico:

(a) Quali sono le migliori costanti in (2.0.4) e (2.0.5) e sono esse raggiunte? (Nel caso euclideo, si ha una risposta completa solo nel caso $n = 3$, Ω sfera di raggio R e termine di resto $\|\cdot\|_p$ con $p = 2$, nel qual caso si ha che $C(\Omega) = \pi^2/4R^2$ e questa costante non è raggiunta, come dimostrato nel lavoro di Brezis e Nirenberg [7].)

(b) Cosa potrebbe sostituire il secondo membro delle disuguaglianze (2.0.4) e (2.0.5) quando Ω è illimitato, ad esempio un semispazio?

2.1 Alcune premesse

2.1.1 Proprietá dello spazio $L_{p,w}$

In questo paragrafo, richiamiamo per comodità di lettura alcune proprietà inerenti gli spazi di Lebesgue deboli, che ricorreranno nel seguito della trattazione.

Definizione 2.1.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Denotiamo con $L^p_w(\Omega)$ il seguente spazio di funzioni:*

$$L^p_w(\Omega) = \Big\{ f \text{ misurabili su } \Omega \mid [f]_{L^p_w(\Omega)} < +\infty \Big\} \tag{2.1.1}$$

dove

$$[f]_{L^p_w(\Omega)} = \sup_{t>0} t\,|\{\, x \in \Omega|\ |f(x)| > t\,\}|^{1/p} \tag{2.1.2}$$

L'espressione (2.1.2) non definisce una norma, poichè la disuguaglianza triangolare non è soddisfatta (ad es., per $\Omega =]0,1[$, $p = 1$, $u(t) = t$, $v(t) = 1 - t$, risulta $[u]_{1,w} = [v]_{1,w} = 1/4$, e $[u + v]_{1,w} = 1$). Valgono, però, le seguenti proprietà:

$\forall f, g \in L^p_w(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta

(i) $[f]_{p,w} = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o. su Ω

(ii) $[\frac{1}{2}(f + g)]_{p,w} \leq [f]_{p,w} + [g]_{p,w}$

(iii) $[\lambda f]_{p,w} = |\lambda|[f]_{p,w}$.

Osserviamo immediatamente che , $\forall\, q \geq 1$, ogni funzione in $L^q(\Omega)$ appartiene a $L^q_w(\Omega)$ e $[f]_{q,w} \leq \|f\|_q$. Infatti, $\forall t > 0$ risulta:

$$t^q\,|\{\, x :\ |f(x)| > t\,\}| \leq \int_{|f|>t} |f(x)|^q\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_q^q.$$

Viceversa, vale la seguente:

Proposizione 2.1.2. *Se Ω è un aperto limitato e $p > 1$, allora*

$$L^p_w(\Omega) \subset \bigcap_{q<p} L^q(\Omega) \tag{2.1.3}$$

$$e\ \ \|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \left\{ |\Omega|^{1-q/p} \frac{p}{p-q} \right\}^{1/q} [f]_{L^p_w(\Omega)} \tag{2.1.4}$$

Dimostrazione. Se $1 < q < p$, posto, $\forall t > 0$, $\Omega_t = \{\, x \in \Omega|\ |f(x)| > t\,\}$, risulta:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^q\,\mathrm{d}x &= q \int_0^\infty t^{q-1}|\Omega_t|\,\mathrm{d}t \\
&= q \int_0^A t^{q-1}|\Omega_t|\,\mathrm{d}t + q \int_A^\infty t^{q-1}|\Omega_t|\,\mathrm{d}t \\
&\leq |\Omega|\,A^q + \frac{q}{p-q}[f]^p_{p,w} A^{q-p}
\end{aligned}$$

e quindi, scegliendo $A = [f]_{p,w}|\Omega|^{-1/p}$, la tesi. □

Dunque, $\forall\, 0 < \varepsilon \leq p-1$, vale la seguente formula:

$$\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)} \leq \left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^{1/(p-\varepsilon)} |\Omega|^{\varepsilon/p(p-\varepsilon)} [f]_{L^p_w(\Omega)}. \tag{2.1.5}$$

La seguente proposizione ci fornisce una definizione equivalente dello spazio L^p_w nel caso $p > 1$.

Proposizione 2.1.3.

$f \in L^p_w(\Omega), p > 1 \iff \exists K > 0$ *tale che* $\forall A \subset \Omega$ *misurabile*, $|A| < \infty$, *risulta*

$$\int_A |f| \,\mathrm{d}x \leq K\, |A|^{1/p'}, \text{ con } p' \text{ esponente coniugato di } p.$$

Dimostrazione. Infatti, se $f \in L^p_w(\Omega), p > 1$, vale la maggiorazione

$$\sup_{t>0} t\, |\Omega_t|^{1/p} \leq \sup_{A \subset \Omega} |A|^{1/p-1} \int_A |f| \,\mathrm{d}x \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t>0} t\, |\Omega_t|^{1/p}$$

ove nell'ultima disuguaglianza si è usata la stima (2.1.4) della proposizione precedente. □

Dunque, posto per $p > 1$:

$$\|f\|_{p,w} = \sup_A \frac{\int_A |f(x)| \mathrm{d}x}{|A|^{1/p'}} \tag{2.1.6}$$

ove il sup è fatto su tutti gli insiemi misurabili $A \subset \Omega, |A| < +\infty$, la (2.1.6) definisce questa volta una norma, che risulta equivalente alla $[f]_{p,w}$.

Osservazione 2.1.4. Le precedenti considerazioni consentono di riconoscere la relazione intercorrente tra gli spazi L^p_w e gli spazi di Marcinkiewicz. Infatti, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $0 < \beta < 1$, si definisce spazio di Marcinkiewicz $M_\beta(\Omega)$ lo spazio delle funzioni misurabili su Ω per cui:

$$\|u\|_{M_\beta(\Omega)} = \sup \frac{1}{|A|^\beta} \int_A |u(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty$$

ove il sup è fatto su tutti gli insiemi misurabili $A \subset \Omega$ di misura finita. Dunque, per $p > 1$, $L^p_w(\Omega) \equiv M_\beta(\Omega)$ per $\beta = 1 - 1/p$.

Esempio 2.1.5. *Se $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ è un gruppo omogeneo e $|\cdot|$ è una norma omogenea su $\mathbb{G}$, la funzione $f(x) = |x|^{-\lambda}$ non sta in nessuno spazio L^p, ma appartiene allo spazio $L^q_w(\mathbb{R}^N)$ con $q = Q/\lambda$, ove Q è la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$. In particolare:*

$$\|f\|_{\frac{Q}{\lambda},w} = \frac{Q}{Q-\lambda}|B(0,1)|^{\lambda/Q}$$

ove $B(0,1)$ denota la sfera unitaria per la norma omogenea $|\cdot|$, ovvero $B(0,1) = \{x \in \mathbb{G}|\ |x| < 1\}$.

Concludiamo questa premessa, richiamando alcune proprietà fondamentali riguardanti la convoluzione tra funzioni L^p e L^p-deboli su gruppi omogenei. Innanzitutto, se $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ è un gruppo omogeneo, ed f, g sono funzioni misurabili su $\mathbb{G}$, la convoluzione $f * g$ si definisce come:

$$f * g = \int f(y^{-1} \circ x)g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(y)g(x \circ y^{-1})\,\mathrm{d}y$$

supposto che gli integrali convergano. La ben nota disuguaglianza di Young caratterizzante la convoluzione tra funzioni L^p ammette la seguente estensione al caso degli spazi L^p-deboli.

Teorema 2.1.6. (Disuguaglianze di Young deboli)
Siano $1 \le p < \infty$, $1 < q, r < \infty$ e $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$. Allora valgono le seguenti:

(1) Se $f \in L^p$, con $1 \le p < \infty$ e $g \in L^q_w$, allora $f * g \in L^r_w$ ed esiste $C_1 = C_1(p,q) > 0$ tale che $\|f * g\|_{r,w} \le C_1 \|f\|_p \|g\|_{q,w}$;

(2) Se $f \in L^p$, $p > 1$ e $g \in L^q_w$, allora $f * g \in L^r$ ed esiste $C_2 = C_2(p,q) > 0$ tale che $\|f * g\|_r \le C_2 \|f\|_p \|g\|_{q,w}$;

(3) Se $f \in L^p_w$, e $g \in L^q_w$, allora $f * g \in L^r_w$ ed esiste $C_3 = C_3(p,q) > 0$ tale che $\|f * g\|_{r,w} \le C_3 \|f\|_{p,w} \|g\|_{q,w}$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione delle (1) e (2), si veda Folland -Stein [18, Prop.1.19]; per la (3) si confronti O'Neil [45, Teor. 2.6]. □

2.1.2 La nozione di capacità subellittica

Dedichiamo questo paragrafo ad illustrare come la classica nozione di *capacità* (si veda as es. [39]) si estenda al contesto subellittico in esame, in vista dell'utilizzo di questa nozione nelle dimostrazioni dei paragrafi 2.2 e 2.3.

Vogliamo, dunque, introdurre la definizione di capacità di un insieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ rispetto al gradiente subellittico $X = (X_1, \ldots, X_m)$.
Cominciamo con l'osservare che lo spazio $S^1(\mathbb{R}^N)$, definito come il completamento di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ rispetto alla norma $\|Xu\|_2$, può essere riguardato anche come il completamento dello spazio $Lip_0(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni Lipschitziane a supporto compatto rispetto alla stessa norma, essendo ogni $f \in Lip_0(\mathbb{R}^N)$ approssimabile mediante funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ in norma S^1. Introduciamo, ora, alcune definizioni e lemmi preliminari.

Definizione 2.1.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato, $u \in S^1(\mathbb{R}^N)$ e $k \in \mathbb{R}$. Si dirà che "$u \geq c$ su Ω nel senso di $S^1(\mathbb{R}^N)$" se esiste una successione $\{u_n\} \subset Lip_0(\mathbb{R}^N)$ tale che:*

i) $u_n \geq k$ *su* Ω

ii) $u_n \to u$ *in* $S^1(\mathbb{R}^N)$

Analogamente si definisce $u \leq k$ su Ω e $u \equiv k$ su Ω.

Se $k \geq 0$, definiamo "troncata a livello k" di u la seguente funzione:

$$u^k = \begin{cases} u & \text{se } u \leq k \\ k & \text{se } u > k. \end{cases}$$

Allora si provano facilmente le seguenti proprietà:

Lemma 2.1.8. *Se $u \in S^1(\mathbb{R}^N)$ e $k > 0$, la sua troncata $u^k \in S^1(\mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. Sia $\{u_n\} \subset Lip_0, u_n \to u$ in S^1. Allora la successione delle troncate $\{u_n^k\}$ appartiene ancora a Lip_0. Inoltre, poichè

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^k - u^k\|_{L^{2^*}} \leq \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^{2^*}} = 0$$
$$\text{e } \limsup_{n\to\infty} \|u_n^k\|_{S^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{S^1(\mathbb{R}^N)}$$

esiste una sottosuccessione che chiameremo ancora $\{u_n^k\}$ tale che $\{u_n^k\} \rightharpoonup u^k$ in $S^1(\mathbb{R}^N)$; ciò implica che una successione di medie u_n' di $\{u_n^k\}$ converge fortemente in $S^1(\mathbb{R}^N)$ ad u^k e chiaramente $\{u_n'\} \subset Lip_0$. □

Lemma 2.1.9. *Se* $u \in S^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $u \geq k$ *su un insieme* Ω *nel senso di* S^1, *allora la troncata* $u^k \equiv k$ *su* Ω *nello stesso senso.*

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste una successione $\{u_n\} \subset Lip_0$ tale che $u_n \to u$ in S^1 e $u_n \geq k$ su Ω; allora, come prima, esiste una sottosuccessione estratta dalla $\{u_n^k\}$ che converge debolmente ad u^k, da cui una successione di medie di u_n^k converge fortemente ad u^k e coincide con k su Ω. □

Diamo ora la definizione di capacità.

Definizione 2.1.10. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitato. Definiamo* capacità di Ω rispetto al sistema di campi vettoriali $X = (X_1, \dots, X_m)$ *la quantità*

$$\operatorname{cap}(\Omega) := \inf_{u \in \Gamma} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |Xu|^2 \mathrm{d}x \right\} \tag{2.1.7}$$

$$\text{ove } \Gamma = \{u \in S^1(\mathbb{R}^N) |\ u \geq 1 \text{ su } \ \Omega \ \text{ nel senso di } S^1(\mathbb{R}^N)\}$$

Si dimostra che l'inf in (2.1.7) è raggiunto da un' unica funzione $v \in S^1(\mathbb{R}^N)$ che chiameremo *potenziale capacitario di* Ω *(rispetto al sistema* X*).* Vale, infatti, il seguente:

Teorema 2.1.11. *Esiste ed è unica una funzione* $v \in \Gamma$ *tale che*

$$\operatorname{cap}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^N} |Xv|^2 \mathrm{d}x$$

Inoltre, v *verifica le seguenti proprietà:*

i) $v \equiv 1$ *in* $\overline{\Omega}$ *nel senso di* $S^1(\mathbb{R}^N)$*;*

ii) v *verifica la seguente proprietà di superarmonicità:*

$$\int < Xv, X\varphi > \geq 0 \quad \forall \varphi \in S^1(\mathbb{R}^N), \varphi \geq 0 \textit{ su } \Omega \textit{ nel senso di } S^1.$$

In particolare, v *è* debolmente $\mathcal{L}$*-armonica in* $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Dimostrazione. Poichè l'insieme Γ è un insieme chiuso e convesso ed $S^1(\mathbb{R}^N)$ è uno spazio di Hilbert, esiste ed è unico l'elemento $v \in \Gamma$ di minima norma. Dunque risulta

$$\operatorname{cap}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^N} |Xv|^2 \mathrm{d}x$$

Denotiamo per comodità $J(u,v) = \int < Xu, Xv >$ e $J(u) = J(u,u)$. Dai Lemmi 2.1.8 e 2.1.9 segue che se $u \in \Gamma$, allora la troncata $u^1 \in \Gamma$, e poichè

$$J(u^1) \leq J(u)$$

segue che $v \equiv 1$ su $\overline{\Omega}$ nel senso di S^1, ovvero la i).

Per quanto riguarda la ii), osserviamo che se $\varphi \in S^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$ su Ω, allora $v + \varepsilon\varphi \in \Gamma$ e quindi

$$J(v + \varepsilon\varphi) \geq J(v) \quad \forall \varepsilon > 0$$

ovvero

$$2\varepsilon\, J(v,\varphi) + \varepsilon^2\, J(\varphi,\varphi) \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

che implica

$$J(v,\varphi) \geq 0. \tag{2.1.8}$$

Inoltre, poichè ogni funzione $\varphi \in C_0^\infty$ a supporto compatto in $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ è ammissibile nella (2.1.8), si deduce che

$$\int < Xv, X\varphi > \mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}).$$

il che completa la dimostrazione della ii). $\square$

2.2 La disuguaglianza con termine di resto $||f||_{\frac{Q}{Q-2},w}$

Questo paragrafo contiene il risultato più importante da noi ottenuto, ovvero la dimostrazione nel contesto astratto dei Sublaplaciani della disuguaglianza di Sobolev con termine di resto $\|f\|_{\frac{Q}{Q-2},w}$. Prima, però, di procedere alla dimostrazione, è utile richiamare qui alcune proprietà della miglior costante di Sobolev su gruppi di Carnot, analoghe a quelle note per il caso euclideo.
Sia Ω un qualunque aperto di $\mathbb{G}$ e denotiamo:

$$S(\Omega) = \inf_{u \in S_0^1(\Omega)} \frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}\,. \tag{2.2.1}$$

Dall'invarianza del rapporto

$$\frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} \tag{2.2.2}$$

rispetto alle traslazioni del gruppo e alle dilatazioni

$$\delta_\lambda(x) = (\lambda\, x^{(1)}, \lambda^2\, x^{(2)}, \cdots, \lambda^r\, x^{(r)})$$

si deduce la seguente importante proprietà di $S(\Omega)$:

Proposizione 2.2.1. *$S(\Omega)$ è indipendente da Ω e dipende solo da Q. In particolare $S(\Omega) = S(\mathbb{G})$.*

Dimostrazione. Prolungando a zero gli elementi di $C_0^\infty(\Omega)$ fuori da Ω, si può riguardare $C_0^\infty(\Omega)$ quale sottoinsieme di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Analogamente, possiamo vedere $S_0^1(\Omega)$ come sottoinsieme di $S^1(\mathbb{R}^N)$. Quindi si ha che

$$S(\Omega) \geq S(\mathbb{G})$$

Viceversa, sia $\{u_m\} \subset S^1(\mathbb{R}^N)$ una successione minimizzante per $S(\mathbb{G})$. Per densità di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ in $S^1(\mathbb{R}^N)$ possiamo assumere $\{u_m\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Possiamo, inoltre, assumere che $0 \in \Omega$, data l'invarianza delle norme coinvolte.
Riscalando le u_m mediante le dilatazioni δ_λ, ovvero considerando le funzioni:

$$v_m = u_m \circ \delta_{\lambda_m}$$

per λ_m sufficientemente grandi si ha che

$$v_m \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ma grazie all'invarianza rispetto alle dilatazioni δ_λ del rapporto (2.2.2), risulta:

$$S(\Omega) \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{\|Xv_m\|_2^2}{\|v_m\|_{2^*}^2} = S(\mathbb{G})$$

da cui

$$S(\Omega) = S(\mathbb{G}) = S.$$

ovvero la tesi. □

Proposizione 2.2.2. *S non è mai assunta quando Ω è un dominio limitato.*

Dimostrazione. Sia Ω limitato e supponiamo per assurdo che S sia assunto da una funzione $u \in S_0^1(\Omega)$.
Sia B una sfera per la norma omogenea $|\cdot|$ contenente Ω e definiamo

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{su } \Omega \\ 0 & \text{su } B \setminus \Omega. \end{cases}$$

Allora S è assunto su B dalla funzione $\tilde{u}$ e $\tilde{u}$ soddisfa l'equazione

$$-\mathcal{L}u = \mu u^{2^*-1}$$

per una opportuna costante positiva μ.
Dunque, a meno di costanti moltiplicative, $\tilde{u}$ soddisfa l'equazione

$$-\mathcal{L}u = u^{2^*-1}$$

nella sfera B, e ciò contraddice il risultato di non esistenza alla Pohozaev per insiemi δ_λ-stellati provato da Garofalo e Vassilev in [27]. $\square$

Passiamo, ora, ad enunciare il risultato principale di questo capitolo, per il quale si veda anche il lavoro da me redatto [40].

Teorema 2.2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ un aperto limitato. Allora, esiste una costante $C = C(\Omega) > 0$ tale che*

$$\|Xf\|_2^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2 + C(\Omega)\|f\|^2_{\frac{Q}{Q-2},w} \qquad \forall f \in S_0^1(\Omega) \tag{2.2.3}$$

dove $C(\Omega)$ è una costante dipendente solo da Ω (e Q), $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$, S è la miglior costante di immersione in Ω, i.e.

$$S = \inf_{u\in S_0^1(\Omega)} \frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} = \inf_{u\in S^1(\mathbb{G})} \frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}$$

e w denota la norma L^p debole definita come

$$\|f\|_{p,w} = \sup_A \frac{\int_A |f(x)|\mathrm{d}x}{|A|^{1/p'}}$$

dove l'estremo superiore è fatto su tutti gli insiemi $A \subset \mathbb{G}$ di misura finita $|A|$ e p' è l'esponente coniugato di $p \in (1,\infty)$.

Dimostrazione. Sia $f \in S_0^1(\Omega)$. Possiamo assumere che $f \geq 0$, perché possiamo sostituire f con $|f|$ senza cambiare alcuna delle norme in (2.2.3).
Sia $g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ e sia $u \in S_0^1(\Omega)$ la soluzione di

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = g & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2.4}$$

e definiamo

$$\phi(x) \;=\; f(x) + u(x) + \|u\|_\infty v(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

dove f ed u si intendono estese a 0 al di fuori di Ω e v denota il *potenziale capacitario subellittico* di Ω, definito nel Teorema 2.1.11.
Dunque, la disuguaglianza di Sobolev in tutto $\mathbb{G}$ applicata alla funzione ϕ dá:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |X\,\phi|^2 \geq S\,\|\phi\|_{2^*}^2$$

$$\text{i.e.} \quad \int |X(f+u)|^2 + \|u\|_\infty^2 \int |Xv|^2 \geq S\|\phi\|_{2^*}^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2 \tag{2.2.5}$$

dove si è usato il fatto che il termine $\int < X(f+u), Xv >$ è nullo, essendo $f+u \in S_0^1(\Omega)$ e v costante in Ω . Si osservi che la seconda disuguaglianza nella (2.2.5) vale poiché $f \geq 0$ e $u + \|u\|_\infty v \geq 0$ in Ω. Si ha, dunque

$$\int |X\,f|^2 + \int |Xu|^2 + 2\int < Xf, Xu > +k\|u\|_\infty^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2$$

$$\int |X\,f|^2 + \int |Xu|^2 - 2\int f\,\mathcal{L}u + k\|u\|_\infty^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2$$

dove $k = \mathrm{cap}(\Omega)$. Sostituendo g con λg e u con λu e ottimizzando rispetto a λ, otteniamo

$$\int |Xf|^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2 + \left(\int fg\right)^2 \Big/ \left[\int |Xu|^2 + k\|u\|_\infty^2\right] \tag{2.2.6}$$

Nella precedente disuguaglianza, è possibile massimizzare il termine di destra rispetto a g. In vista della definizione di norma debole, ci restringiamo a considerare $g = 1_{\mathrm{A}}$, dove A è un sottoinsieme arbitrario di Ω. Per le quantità nella (2.2.6) valgono le seguenti stime

$$\int |Xu|^2 \leq C_Q|A|^{1+2/Q} \tag{2.2.7}$$

$$\|u\|_\infty \leq C_Q'|A|^{2/Q} \tag{2.2.8}$$

Infatti, moltiplicando la (2.2.4) per u e usando le disuguaglianze di Hölder e Sobolev, si ha

$$\int |Xu|^2 = -\int gu = -\int_A u \leq \|u\|_{2^*}|A|^{1/2+1/Q} \leq S^{-1/2}\|Xu\|_2|A|^{1/2+1/Q}$$

che implica la (2.2.7). Inoltre, dal confronto con la soluzione in tutto lo spazio, ricordando che u è la soluzione in $S_0^1(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= 1_A \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ed usando la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ descritta nel Teorema 1.1.7, per q.o. $\xi \in \Omega$ si ha

$$\begin{aligned} |u(\xi)| \le C_Q \frac{1}{|\cdot|^{Q-2}} * 1_A(\xi) &= C_Q \int \frac{1}{|\xi^{-1} \circ \xi'|^{Q-2}} \cdot 1_A(\xi')\mathrm{d}\xi' \\ &= C_Q \int_A \frac{1}{|\xi^{-1} \circ \xi'|^{Q-2}} \mathrm{d}\xi' \le C'_Q |A|^{2/Q} \end{aligned}$$

poiché la funzione $|\xi|^{-Q+2}$ appartiene allo spazio $L_w^{\frac{Q}{Q-2}}$.

$$\begin{aligned} \int |Xu|^2 + k\|u\|_\infty^2 &\le C_Q|A|^{1+2/Q} + k\, C'_Q\, |A|^{4/q} \\ &\le |A|^{4/Q}(C_Q|A|^{\frac{Q-2}{Q}} + k\, C'_Q) \\ &\le |A|^{4/Q}(C_Q|\Omega|^{\frac{Q-2}{Q}} + \mathrm{cap}(\Omega)C'_Q) \end{aligned}$$

Ora osserviamo che

$$|\Omega|^{\frac{Q-2}{Q}} \le S^{-1}\mathrm{cap}(\Omega)$$

Infatti, dalla disuguaglianza di Sobolev applicata alla funzione v, si ha

$$\mathrm{cap}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^N} |Xv|^2 \ge S|v|_{2^*}^2 \ge S\,|\Omega|^{2/2^*} = S\,|\Omega|^{\frac{Q-2}{Q}}$$

Dunque, si ottiene che

$$\left[\int |Xu|^2 + \mathrm{cap}(\Omega)\|u\|_\infty^2\right] \le |A|^{4/Q}(C_Q\,\mathrm{cap}(\Omega))$$

Quindi, dalla (2.2.6) con $g = 1_A$, tenendo conto dell'ultima disuguaglianza, abbiamo

$$\int |Xf|^2 \ge S\|f\|_{2^*}^2 + C_Q/\mathrm{cap}(\Omega)\, \frac{\left(\int_A f\right)^2}{|A|^{4/Q}}$$

ed infine, facendo l'estremo superiore su tutti gli insiemi A, si prova la tesi, con $C(\Omega) = C_Q/\mathrm{cap}(\Omega)$. $\square$

2.3 La disuguaglianza con termine di resto $||Xf||_{\frac{Q}{Q-1},w}$

In analogia con quanto dimostrato da Brezis e Lieb in [6], anche nel caso dei Sublaplaciani è possibile dimostrare una disuguaglianza più forte della precedente, avente come termine di resto una opportuna norma L^q-debole del gradiente subellittico. Proviamo, infatti, il seguente risultato:

Teorema 2.3.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{G}$ un aperto limitato. Allora, esiste una costante $D = D(\Omega) > 0$ tale che*

$$\|Xf\|_2^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2 + D(\Omega)\|Xf\|^2_{\frac{Q}{Q-1},w} \qquad \forall f \in S_0^1(\Omega) \tag{2.3.1}$$

dove $D(\Omega)$ è una costante dipendente solo da Ω (e Q), $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$, S è la miglior costante di immersione in Ω.

Osserviamo subito che la (2.3.1) risulta più forte della (2.2.3), poichè la disuguaglianza di Sobolev ha un'estensione alle norme deboli, grazie alla disuguaglianza di Young negli spazi L^p-deboli.
Verifichiamo, infatti, che

$$\|Xf\|_{\frac{Q}{Q-1},w} \geq C\,\|f\|_{\frac{Q}{Q-2},w} \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Usando la soluzione fondamentale Γ, possiamo scrivere $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ come:

$$f = -\mathcal{L}\Gamma * f = -X\Gamma * Xf$$

e risulta $|X\Gamma| \in L_{\frac{Q}{Q-1},w}$, poichè

$$|X\Gamma| = C_Q(Q-2)|Xd|d^{1-Q} \leq C\,d^{1-Q}$$

essendo Xd omogeneo di grado 0 e perciò limitato in $\mathbb{G}$.

$\Big($ Infatti, $\sup_{\xi\neq 0}|(Xd)(\xi)| = \sup_{\xi\neq 0}|(Xd)(\delta_{\frac{1}{d(\xi)}}\xi)| = \max_{d(\eta)=1}|(Xd)(\eta)|.\Big)$

Quindi, per la disuguaglianza di Young debole, $f \in L_{r,w}$ con

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{Q-1}{Q} + \frac{Q-1}{Q} - 1 = \frac{Q-2}{Q}$$

$$\text{e} \quad \|f\|_{\frac{Q}{Q-2},w} \leq \|X\Gamma\|_{\frac{Q}{Q-1},w}\|Xf\|_{\frac{Q}{Q-1},w} \leq C\|Xf\|_{\frac{Q}{Q-1},w}.$$

Procediamo, ora, con la dimostrazione del teorema.

Dimostrazione del Teorema 2.3.1 Sia $f \in S_0^1(\Omega)$. Anche in questo caso, possiamo supporre $f \geq 0$, perchè si può sostituire f con $|f|$ senza cambiare alcuna delle norme in (2.3.1).
Sia $g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ e $u \in S_0^1(\Omega)$ sia la soluzione di

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= g \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.2}$$

e definiamo su tutto lo spazio la funzione

$$\phi(x) \;=\; f(x) + u(x) + \|u\|_\infty v(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

dove f ed u si intendono estese a 0 al di fuori di Ω e v denota il potenziale capacitario di Ω anzi definito.
Come nella dimostrazione del Teorema 2.2.3, la disuguaglianza di Sobolev applicata a ϕ fornisce la disuguaglianza (2.2.6), che può essere riscritta come segue:

$$\int |Xf|^2 \geq S\|f\|_{2^*}^2 + \left(\int Xf \cdot Xu\right)^2 \Big/ \left[\int |Xu|^2 + k\|u\|_\infty^2\right] \tag{2.3.3}$$

che vale $\forall\, u \in S_0^1 \cap L^\infty$, dove $k = \mathrm{cap}(\Omega) = \int |Xv|^2$.
Ricordando che X denota il sistema di vettori $(X_1, \ldots, X_m)$, con m pari alla dimensione del primo strato di $\mathbb{G}$, scegliamo u soluzione del problema (2.3.2) con

$$g = X_i\left[(\,\mathrm{sgn} X_i f\,)1_A\right]$$

dove si sottintende la sommatoria sugli indici per $i = 1, \ldots, m$.
Verifichiamo che $u \in L^\infty$. Possiamo scrivere u come:

$$u = w + h$$

dove w soddisfa l'equazione $\mathcal{L}w = g$ in tutto lo spazio, ovvero

$$w = -\,C_Q\,(\Gamma * g)$$

e h è $\mathcal{L}$-armonica, con $h = -w$ su $\partial\Omega$.
Per quanto riguarda w, si ha

$$w = -\,C_Q|\cdot|^{2-Q} * g = -\,C_Q\big(X_i\,|\cdot|^{2-Q}\big) * \left[(\,\mathrm{sgn} X_i f\,)1_A\right]$$

per cui

$$|w(\xi)| \le C_Q\,(Q-2)\big(|\cdot|^{1-Q} * 1_A\big)(\xi) \quad \text{q.o. } \xi \in \mathbb{G}$$

e poichè $|\xi|^{1-Q}$ appartiene allo spazio $L_w^{\frac{Q}{Q-1}}$, otteniamo

$$\|w\|_\infty \le C'_Q |A|^{1/Q}$$

essendo Q l'esponente coniugato di $\frac{Q}{Q-1}$.
D'altra parte, h è $\mathcal{L}$-armonica in Ω, per cui, per il principio del massimo, risulta

$$\|h\|_\infty \le \|w\|_{\infty,\partial\Omega} \le \|w\|_\infty.$$

Dunque, in definitiva:

$$\|u\|_\infty \le 2\,\|w\|_\infty \le C'_Q |A|^{1/Q}. \tag{2.3.4}$$

Stimiamo, ora, il termine $\displaystyle\int |Xu|^2$.
Moltiplicando l'equazione $\mathcal{L}u = g$ per u ed integrando, si ha, grazie alla disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned}\int |Xu|^2 &= -\int g\,u = -\int X_i\big[(\,\mathrm{sgn} X_i f\,)1_A\big]u \\ &= \int (\,\mathrm{sgn} X_i f\,)1_A (X_i u) \le (\int |Xu|^2)^{1/2}\,|A|^{1/2}\end{aligned}$$

e quindi

$$\int |Xu|^2 \le |A|. \tag{2.3.5}$$

In conclusione, poichè $f = 0$ su $\partial\Omega$, risulta

$$\begin{aligned}\int Xf \cdot Xu &= -\int f\mathcal{L}u = -\int f\,X_i\big[(\,\mathrm{sgn} X_i f\,)1_A\big] \\ &= \int X_i f\big[(\,\mathrm{sgn} X_i f\,)1_A\big] = \int |X_i f| 1_A\end{aligned}$$

Usando, ora, le stime (2.3.4) e (2.3.5) nella (2.3.3), si ha:

$$\int |Xf|^2 \ge S\|f\|_{2^*}^2 + C_Q \left(\int_A |X_i f|\right)^2 \Big/ \left(\mathrm{cap}(\Omega)|A|^{2/Q}\right) \tag{2.3.6}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\int |Xu|^2 + k\|u\|_\infty^2 &\leq C\,|A| + k\,C'\,|A|^{2/Q} \\ &\leq |A|^{2/Q}(C\,|A|^{\frac{Q-2}{Q}} + k\,C') \\ &\leq |A|^{2/Q}(C|\Omega|^{\frac{Q-2}{Q}} + \mathrm{cap}(\Omega)C') \\ &\leq |A|^{2/Q}(C_Q\,\mathrm{cap}(\Omega))\end{aligned}$$

ove si è usato, come nel Teorema 2.2.3, il fatto che $|\Omega|^{\frac{Q-2}{Q}} \leq S^{-1}\mathrm{cap}(\Omega)$. Infine, prendendo il sup su tutti gli insiemi $A \subset \Omega$ nella (2.3.6), si ottiene la tesi, con $D(\Omega) = C_Q/\mathrm{cap}(\Omega)$. □

2.4 Il caso G=H^n

2.4.1 Ottimalità della disuguaglianza

Si consideri ora il caso particolare del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, il gruppo di Carnot di passo due $(\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$, i cui punti saranno denotati con $\xi = (z,t) = (x,y,t)$, dotato della legge di composizione:

$$\xi \circ \xi' = (z + z',\, t + t' + 2(< x', y > - < x, y' >))$$

dove $<,>$ denota il prodotto interno in $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che il Laplaciano subellittico canonico su $\mathbb{H}^n$ è l'operatore

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{j=1}^{n}(X_j^2 + Y_j^2)$$

dove

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t, \quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t$$

per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$. Indicheremo con

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$$

il gradiente subellittico canonico sul gruppo $\mathbb{H}^n$.
Ricordiamo che le dilatazioni su $\mathbb{H}^n$ sono date da

$$\delta_\lambda(\xi) = (\lambda z, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0$$

per cui la dimensione omogenea dello spazio risulta essere $Q = 2n + 2$.

In questo caso, grazie alla conoscenza dei minimizzanti della disuguaglianza di Sobolev in tutto lo spazio, siamo in grado di provare che la disuguaglianza (2.2.3) è ottimale, nel senso che non è possibile aggiungere la norma $L^{2^*/2}$ a destra della (2.2.3). Assumiamo per semplicità che $0 \in \Omega$ e consideriamo la disuguaglianza di Sobolev "migliorata" su Ω limitato di $\mathbb{H}^n$:

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2^2 \geq S\|u\|_{2^*}^2 + C\|u\|_q^2 \qquad \forall\, u \in S_0^1(\Omega) \tag{2.4.1}$$

con $q \geq 1$. Naturalmente, tale disuguaglianza vale se e solo se il quoziente

$$R(u) = \frac{\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2^2 - S\|u\|_{2^*}^2}{\|u\|_q^2} \tag{2.4.2}$$

è limitato dal basso da una costante positiva C in $S_0^1(\Omega)$ (C dipendente solo da Ω).
Com'è noto, quando $\Omega = \mathbb{H}^n$ la miglior costante S è raggiunta, a meno di traslazioni del gruppo e di costanti moltiplicative, dalla famiglia di funzioni:

$$U_\varepsilon(z,t) = \frac{C_\varepsilon}{((\varepsilon + |z|^2)^2 + t^2)^{\frac{Q-2}{4}}}$$

dove $\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon = (2n(Q-2)\varepsilon)^{\frac{Q-2}{4}}$ (si veda [34]).
Consideriamo, ora, le funzioni

$$u_\varepsilon = \varphi(z,t)U_\varepsilon(z,t)$$

dove φ è una funzione di cut-off , φ sufficientemente piatta intorno a 0 (ad esempio, $\varphi \equiv 1$ in un intorno di 0). Si ottengono le seguenti stime:

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} U_\varepsilon^{2^*}(z,t)\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2 U_\varepsilon^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t + O(\varepsilon^{Q/2}) \tag{2.4.3}$$

e

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} U_\varepsilon^{2^*}(z,t)\mathrm{d}z\mathrm{d}t + O(\varepsilon^{Q/2}) \tag{2.4.4}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u_\varepsilon\|_2^2 &= \int_\Omega \varphi^2 |\nabla_{\mathbb{H}^n} U_\varepsilon|^2 + 2\int_\Omega \varphi U_\varepsilon \nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi \nabla_{\mathbb{H}^n} U_\varepsilon + \int_\Omega U_\varepsilon^2 |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2 \\
&= -\int_\Omega \varphi^2 U_\varepsilon \Delta_{\mathbb{H}^n} U_\varepsilon + \int_\Omega U_\varepsilon^2 |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2 \\
&= +\int_\Omega \varphi^2 U_\varepsilon^{2^*} + \int_\Omega U_\varepsilon^2 |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2 \qquad (2.4.5)\\
&= \int_\Omega {U_\varepsilon}^{2^*} + \int_\Omega (\varphi^2 - 1)\, {U_\varepsilon}^{2^*} + \int_\Omega U_\varepsilon^2 |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} {U_\varepsilon}^{2^*} + \int_\Omega {U_\varepsilon}^2\, |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2 + \alpha(\varphi,\varepsilon)
\end{aligned}$$

dove

$$\alpha(\varphi,\varepsilon) = -\int_{\Omega^C} {U_\varepsilon}^{2^*} + \int_\Omega (\varphi^2 - 1)\, {U_\varepsilon}^{2^*}.$$

Inoltre, si ha che

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 &= \Big(\int_\Omega |\varphi\, U_\varepsilon|^{2^*}\Big)^{2/2^*} \\
&= \Big(\int_\Omega |U_\varepsilon|^{2^*} + \int_\Omega (\varphi^{2^*} - 1)\, {U_\varepsilon}^{2^*}\Big)^{2/2^*} \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |U_\varepsilon|^{2^*} + \beta(\varphi,\varepsilon)\Big)^{2/2^*} \qquad (2.4.6)
\end{aligned}$$

dove

$$\beta(\varphi,\varepsilon) = -\int_{\Omega^C} {U_\varepsilon}^{2^*} + \int_\Omega (\varphi^{2^*} - 1)\, {U_\varepsilon}^{2^*}$$

Si osservi che $\alpha(\varphi,\varepsilon)$,$\beta(\varphi,\varepsilon) = o(C_\varepsilon^2)$ poiché si può verificare direttamente che $\alpha(\varphi,\varepsilon), \beta(\varphi,\varepsilon) = O(\varepsilon^{Q/2})$. Infatti, indicata con d la norma omogenea sullo spazio $\mathbb{H}^n$:

$$d(\xi) = d(z,t) = (t^2 + |z|^4)^{1/4},$$

essendo $\varphi = 1$ in un intorno di 0, esiste $R > 0$ tale che

$$\begin{aligned}
0 &\le \int (1-\varphi^2) U_\varepsilon^{2^*} \le \int_{d(\xi)>R} U_\varepsilon^{2^*} \mathrm{d}\xi = \int_{d(\xi)>\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}} U_1^{2^*} \mathrm{d}\xi \\
&\le C \int_{d(\xi)>\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{1}{d(\xi)^{2Q}}\, \mathrm{d}\xi = C \int_{\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{Q+1}}\, \mathrm{d}\rho \\
&= O(\varepsilon^{Q/2}).
\end{aligned}$$

Analogamente si stimano gli altri integrali in $\alpha(\varphi,\varepsilon)$ e $\beta(\varphi,\varepsilon)$.
Dunque, posto $\tilde{U}_\varepsilon(z,t)=\frac{1}{C_\varepsilon}U_\varepsilon(z,t)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
R(u_\varepsilon) &= \frac{\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2\, {U_\varepsilon}^2 + o(C_\varepsilon^2)}{(\int_\Omega \varphi^q\, U_\varepsilon^q)^{2/q}} \\
&= \frac{C_\varepsilon^2\, \int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2\, \tilde{U}_\varepsilon^2 + o(C_\varepsilon^2)}{C_\varepsilon^2\, (\int_\Omega \varphi^q\, \tilde{U}_\varepsilon^q)^{2/q}} \\
&= \frac{\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2\, \tilde{U}_\varepsilon^2 + o(1)}{(\int_\Omega \varphi^q\, \tilde{U}_\varepsilon^q)^{2/q}}
\end{aligned}$$

Ora, osserviamo che, quando $\varepsilon\to 0$, $\tilde{U}_\varepsilon$ tende alla soluzione fondamentale Γ di $\Delta_{\mathbb{H}^n}$, a meno di costanti, ovvero

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{U}_\varepsilon(z,t)=\frac{1}{[t^2+|z|^4]^{\frac{Q-2}{4}}}=C\Gamma(z,t)$$

Se $\Gamma(z,t)$ non è L^q-sommabile nell'origine, il denominatore in $R(u_\varepsilon)$ diverge e quindi non ci può essere alcuna costante $C>0$ che limiti dal basso il quoziente (2.4.2). Viceversa, se $\Gamma(z,t)$ è L^q-sommabile in 0, allora $R(u_\varepsilon)$ tende a

$$\frac{\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2\Gamma^2(z,t)dzdt}{\big(\int_\Omega \varphi^q\,\Gamma^q\big)^{2/q}}>0$$

e quindi un limite dal basso positivo per $R(u)$ esiste. Osserviamo, ora, che la soluzione fondamentale di $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ appartiene a $L^q_{loc}(\mathbb{H}^n)$ se e solo se $q<\frac{Q}{Q-2}$; allora la norma L^q, con $q\geq\frac{Q}{Q-2}$ non è ammissibile come termine di resto nella (2.4.1).

Osservazione 2.4.1. Le considerazioni precedenti mostrano la stretta relazione intercorrente tra le norme che possono essere aggiunte al secondo membro della disuguaglianza di Sobolev $\|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\|_2^2\geq S\,\|u\|_{2^*}^2$ e la sommabilità della soluzione fondamentale del Laplaciano di Kohn. In particolare, questo comportamento è in accordo con il principio stabilito nel contesto ellittico euclideo da [32], secondo il quale: "Una disuguaglianza di Sobolev relativa ad un embedding non compatto può essere migliorata aggiungendo ogni norma che sia localmente finita per la soluzione fondamentale dell'operatore associato.

Osservazione 2.4.2. Si noti che la disuguaglianza di Sobolev $\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2^2 \geq S\,\|u\|_{2^*}^2$ non ammette la norma L^2 come termine di resto, poiché la dimensione omogenea $Q = 2n+2$ risulta essere sempre strettamente maggiore di 3. Questo fenomeno può essere messo in relazione con l'assenza di dimensioni critiche per il Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^n}$, dimostrata in [12] (si veda anche [11]). Infatti, esso conferma il principio formulato nel contesto euclideo da Gazzola e Gruneau in [28], secondo il quale: "La dimensione spaziale è critica per un operatore lineare L se e solo se la disuguaglianza di Sobolev può essere migliorata su aperti limitati con l'aggiunta della norma L^2.

A riguardo del problema dell'ottimalità sopra discusso, menzioniamo che le stesse conclusioni ottenute nel caso $\mathbb{H}^n$ possono essere stabilite nel contesto più generale dei gruppi di tipo Iwasawa (si veda [26] e i riferimenti in esso citati per definizioni e proprietà) per la disuguaglianza di Sobolev ristretta allo spazio delle funzioni a simmetria cilindrica. Anche in questo caso, il risultato scaturisce dalla conoscenza dei minimizzanti di Sobolev (calcolati in [26, Teorema 1.6]) e dal loro andamento rispetto alla soluzione fondamentale.

2.4.2 La disuguaglianza migliorata in termini della distanza dall'insieme dei minimizzanti

Nel lavoro [6] del 1985 sulle disuguaglianze di Sobolev con termini di resto in ambito euclideo, Brezis e Lieb lasciavano aperta la seguente questione: esiste un modo naturale per stimare dal basso la quantità

$$\|\nabla f\|_2^2 - S\|f\|_{2^*}^2$$

in termini della "distanza" di f dall'insieme dei minimizzanti?
Una risposta affermativa a questa domanda è stata data da Bianchi ed Egnell in [3] nel 1991. Questi ultimi dimostrano che, indicato con $\mathbf{M}$ l'insieme dei minimizzanti della disuguaglianza di Sobolev, e denotato con $\mathcal{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ lo spazio ottenuto come completamento di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ rispetto alla norma $\|\nabla u\|_2$, esiste una costante positiva α tale che

$$\|\nabla f\|_2^2 - S\|f\|_{2^*}^2 \geq \alpha d(f, \mathbf{M})^2, \quad \forall\, f \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

dove $d(f, \mathbf{M})$ è la distanza della funzione f dall'insieme $\mathbf{M}$ nello spazio di Sobolev $\mathcal{D}_0^{1,2}$, ovvero

$$d(f, \mathbf{M}) = \inf_{u \in \mathbf{M}} \|\nabla (f-u)\|_2.$$

Recentemente, poi, il risultato di Bianchi-Egnell è stato esteso da Lu e Wei [43] al caso della disuguaglianza di Sobolev associata al bi-laplaciano.
In quanto segue, dimostreremo che una disuguaglianza analoga può essere stabilita sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$.

Consideriamo la disuguaglianza di Sobolev su $\mathbb{H}^n$ dovuta a Folland-Stein, ovvero

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 - S\|f\|_{2^*}^2 \geq 0 \quad \forall\, f \in S_0^1(\mathbb{H}^n) \tag{2.4.7}$$

ove S è denota la miglior costante di immersione, ed indichiamo con $\mathbf{M}$ l'insieme delle funzioni estremali della disuguaglianza, i.e.

$$\mathbf{M} = \{\, f \in S_0^1(\mathbb{H}^n) \mid \|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 = S\|f\|_{2^*}^2 \,\}. \tag{2.4.8}$$

Come dimostrato da Jerison e Lee [34], $\mathbf{M}$ è costituito da funzioni della forma

$$\varphi(\xi) = c\, U_{\lambda,\eta}(\xi) = c\, \lambda^{(Q-2)/2} U(\delta_\lambda(\eta^{-1} \circ \xi))$$

dove $c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $U(\xi) = U(z,t) = k_0 \left((1+|z|^2)^2 + t^2\right)^{-(Q-2)/4}$. D'ora in poi, la costante k_0 si intenderà scelta in modo tale che $\|\nabla_{\mathbb{H}^n} U\|_2 = 1$.
Dunque le funzioni estremali di (2.4.7) costituiscono una varietà $2n+3$-dimensionale $\mathbf{M}$ immersa in S_0^1 mediante la mappa:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{H}^n \ni (c, \lambda, \eta) \to c\, U_{\lambda,\eta} \in S_0^1(\mathbb{H}^n).$$

Definiamo la distanza tra questa varietà e una funzione $f \in S_0^1$ come segue:

$$d(f, \mathbf{M}) = \inf_{u \in \mathbf{M}} \|\nabla_{\mathbb{H}^n}(f - u)\|_2 = \inf_{c,\lambda,\eta} \|\nabla_{\mathbb{H}^n}(f - c\, U_{\lambda,\eta})\|_2.$$

Si noti che $d(c\, \lambda^{(Q-2)/2} f \circ \delta_\lambda \circ \tau_\eta, \mathbf{M}) = |c|\, d(f, \mathbf{M})$.

Il risultato da noi ottenuto è il seguente:

Teorema 2.4.3. *Esiste una costante positiva α, dipendente solo dalla dimensione Q, tale che*

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 - S\|f\|_{2^*}^2 \geq \alpha\, d(f, \boldsymbol{M})^2, \quad \forall\, f \in S_0^1(\mathbb{H}^n).$$

Inoltre, il risultato è ottimale nel senso che è falso se il termine di resto è sostituito da $d(f, \boldsymbol{M})^\beta \|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^{2-\beta}$, con $\beta < 2$.

Un argomento chiave nella dimostrazione del teorema è lo studio degli autovalori della seguente equazione:

$$-\Delta_{\mathbb{H}^n} v = \lambda\, U^{2^*-2} v, \qquad v \in S_0^1(\mathbb{H}^n).$$

Cominceremo, dunque, con l'esporre i risultati di questa analisi.

Un problema agli autovalori. Si consideri l'operatore

$$\mathcal{L}_{\lambda,\eta} = -U_{\lambda,\eta}^{2-2^*}\Delta_{\mathbb{H}^n} \qquad \text{su } L^2(U_{\lambda,\eta}^{2^*-2}\mathrm{d}\xi).$$

Poichè l'imbedding

$$S_0^1 \hookrightarrow L^2(U_{\lambda,\eta}^{2^*-2}\mathrm{d}\xi)$$

è compatto, lo spettro di $\mathcal{L}_{\lambda,\eta}$ è discreto.
Nel lemma seguente si calcolano il primo e il secondo autovalore di $\mathcal{L}_{\lambda,\eta}$ e si descrivono i relativi autospazi.

Lemma 2.4.4. *Siano λ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, gli autovalori di $\mathcal{L}_{\lambda,\eta}$, disposti in ordine crescente. Allora*

i) $\lambda_1 = S^{2^*/2}$ *è semplice con autofunzione $U_{\lambda,\eta}$;*

ii) $\lambda_2 = S^{2^*/2}(2^*-1)$ *ha molteplicità $2n+2$ e il corrispondente autospazio è generato da $\{\partial_\lambda U_{\lambda,\eta}, \nabla_\eta U_{\lambda,\eta}\}$.*

Inoltre, gli autovalori non dipendono da λ e da η.

Dimostrazione. Un semplice argomento di riscalamento mostra che gli autovalori non dipendono dai parametri λ e η. Quindi possiamo assumere che $\lambda = 1$, $\eta = 0$, e di conseguenza $U_{\lambda,\eta} = U$. Vogliamo risolvere il problema agli autovalori

$$-\Delta_{\mathbb{H}^n} v = \lambda\, U^{2^*-2} v, \qquad v \in S_0^1(\mathbb{H}^n). \tag{2.4.9}$$

Per questo studio faremo riferimento al Lemma 5 di pag. 988 del lavoro di Malchiodi-Uguzzoni [44].

Ricordiamo che la trasformata di Cayley è un biolomorfismo tra la palla unitaria in $\mathbb{C}^{n+1}$ e il semispazio superiore di Siegel $\mathcal{D} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > |z|^2\}$, dato da

$$z_k = \frac{\zeta_k}{1+\zeta_{n+1}}, \quad k = 1, \ldots, n; \quad w = i\left(\frac{1-\zeta_{n+1}}{1+\zeta_{n+1}}\right), \tag{2.4.10}$$

dove $\zeta \in \mathbb{C}^{n+1}$, $|\zeta| < 1$. Questa trasformazione, ristretta al bordo, fornisce una equivalenza CR tra la sfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ meno un punto e $\partial\mathcal{D}$. Il gruppo di Heisenberg si identifica con $\partial\mathcal{D}$ mediante la corrispondenza $(z,t) \leftrightarrow (z, t + i|z|^2) = (z,w)$. Denotiamo con $F : \mathbb{S}^{2n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\} \to \mathbb{H}^n$ la mappa risultante dalla composizione della (2.4.10) con la corrispondenza $\partial\mathcal{D} = \mathbb{H}^n$, i.e.

$$F(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1}) = \left(\frac{\zeta_1}{1+\zeta_{n+1}}, \ldots, \frac{\zeta_n}{1+\zeta_{n+1}}, \operatorname{Re}\left(i\frac{1-\zeta_{n+1}}{1+\zeta_{n+1}}\right)\right).$$

Si consideri, ora, lo spazio $S^1(\mathbb{S}^{2n+1})$, ottenuto come il completamento di $C^\infty(\mathbb{S}^{2n+1})$ rispetto alla norma

$$\|v\|^2_{S^1(\mathbb{S}^{2n+1})} = \int_{\mathbb{S}^{2n+1}} (b_n |\mathrm{d}v|^2_\theta + R_n v^2)\theta \wedge \mathrm{d}\theta^n$$

ove θ è la forma di contatto standard sulla sfera, $b_n = 2 + 2/n = 2^*$ e $R_n = n(n+1)/2$ è la curvatura scalare di Webster associata a θ (si veda [33]), e si consideri l'isometria lineare $\iota : S^1(\mathbb{S}^{2n+1}) \to S^1_0(\mathbb{H}^n)$ definita da:

$$\iota(v)(\xi) = U(\xi)v(F^{-1}(\xi)), \quad v \in S^1(\mathbb{S}^{2n+1}),\ \xi \in \mathbb{H}^n.$$

Mediante tale isometria, una funzione $u \in S^1_0(\mathbb{H}^n)$ è una soluzione di (2.4.9) se e solo se la funzione $v = \iota^{-1}u$ risolve l'equazione lineare

$$-\Delta_\theta v = \mu\, v \quad \text{in } \mathbb{S}^{2n+1} \tag{2.4.11}$$

per un opportuno autovalore μ. Lo studio degli autovalori dell'operatore $-\Delta_\theta$ su $\mathbb{S}^{2n+1}$ è stato realizzato da Folland in [17]. In particolare, il primo autovalore $\mu_1 = 0$ è semplice e la corrispondente autofunzione è la funzione costante. Tramite l'isometria ι si ottiene, dunque, la prima autofunzione per il problema (2.4.9) ovvero la funzione $\iota(const) = U$, corrispondente all'autovalore $S^{2^*/2}$. Il secondo autovalore μ_2 è $2n+2$-dimensionale ed è generato dalle funzioni $\{\,\mathrm{Re}\,\zeta_j, \mathrm{Im}\,\zeta_j\,\}_{j=1,\dots,n+1}$ ristrette a $\mathbb{S}^{2n+1}$. Un calcolo diretto mostra che, a meno di costanti, risulta:

$$\iota(\mathrm{Re}\,\zeta_j) = \frac{\partial U_{\lambda,\eta}}{\partial x_j}\Big|_{(\lambda,\eta)=(1,0)}, \quad \iota(\mathrm{Im}\,\zeta_j) = \frac{\partial U_{\lambda,\eta}}{\partial y_j}\Big|_{(\lambda,\eta)=(1,0)}, \quad j = 1,\dots,n;$$
$$\iota(\mathrm{Re}\,\zeta_{n+1}) = \frac{\partial U_{\lambda,\eta}}{\partial \lambda}\Big|_{(\lambda,\eta)=(1,0)}, \quad \iota(\mathrm{Im}\,\zeta_{n+1}) = \frac{\partial U_{\lambda,\eta}}{\partial t}\Big|_{(\lambda,\eta)=(1,0)}.$$

Dunque, ricordando che $\eta = (x, y, t)$, si ottiene che il secondo autospazio relativo al problema (2.4.9) è generato dalle funzioni $\{\,\partial_\lambda U_{\lambda,\eta}, \nabla_\eta U_{\lambda,\eta}\,\}$ e che $\lambda_2 = S^{2^*/2}(2^* - 1)$. $\square$

Acquisiti questi risultati preliminari, possiamo procedere alla dimostrazione del teorema.

Dimostrazione del Teorema 2.4.3. Il principale ingrediente nella dimostrazione del teorema è contenuto nel seguente lemma, che studia il comportamento della quantità $\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|^2_2 - S\|f\|^2_{2^*}$ in prossimità di $\mathbf{M}$.

Lemma 2.4.5. *Esiste una costante positiva α, dipendente solo dalla dimensione Q, tale che*

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 - S\|f\|_{2^*}^2 \geq \alpha\, d(f, \boldsymbol{M})^2 \,+\, o(d(f, \boldsymbol{M})^2),$$

per ogni $f \in S_0^1(\mathbb{H}^n)$ con $d(f, \boldsymbol{M}) < \|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2$.

Dimostrazione. Come già osservato, $\mathbf{M}$ è una varietà $2n + 3$-dimensionale immersa in $S_0^1(\mathbb{H}^n)$ mediante la mappa:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{H}^n \ni (c, \lambda, \eta) \to c\, U_{\lambda,\eta} \in S_0^1(\mathbb{H}^n).$$

Sia $f \in S_0^1$ tale che

$$\begin{aligned} d(f, \mathbf{M})^2 &= \inf_{c,\lambda,\eta} \|\nabla_{\mathbb{H}^n}(f - c\, U_{\lambda,\eta})\|_2^2 \\ &= \inf_{c,\lambda,\eta} \left(\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 \,+\, c^2 \,-2c \int \nabla_{\mathbb{H}^n} f \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} U_{\lambda,\eta}\, \mathrm{d}\xi \right) < \|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2. \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che l'estremo inferiore di cui sopra è raggiunto in un punto $(c_0, \lambda_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{H}^n$, con $c_0 \neq 0$.
Poichè $\mathbf{M} \setminus \{0\}$ è una varietà regolare, si deve avere

$$(f - c_0 U_{\lambda_0,\eta_0}) \perp \mathbf{TM}_{c_0 U_{\lambda_0,\eta_0}} \tag{2.4.12}$$

ove lo spazio tangente risulta essere:

$$\mathbf{TM}_{c_0 U_{\lambda_0,\eta_0}} = \mathrm{span}\left\{U_{\lambda_0,\eta_0}, \partial_\lambda U_{\lambda_0,\eta_0}, \nabla_\eta U_{\lambda_0,\eta_0}\right\}. \tag{2.4.13}$$

Richiamiamo a questo punto i risultati del Lemma 2.4.4. Abbiamo provato che il primo ed il secondo autospazio dell'operatore $\mathcal{L}_{\lambda_0,\eta_0} = -\,U_{\lambda_0,\eta_0}^{2-2^*}\Delta_{\mathbb{H}^n}$ su $L^2(U_{\lambda_0,\eta_0}^{2^*-2}\mathrm{d}\xi)$ sono generati rispettivamente da U_{λ_0,η_0} e $\{\partial_\lambda U_{\lambda_0,\eta_0}, \nabla_\eta U_{\lambda_0,\eta_0}\}$. Dunque, lo spazio tangente $\mathbf{TM}_{c_0 U_{\lambda_0,\eta_0}}$ è esattamente la somma del primo e del secondo autospazio dell'operatore $\mathcal{L}_{\lambda_0,\eta_0}$. Inoltre, lo spettro è discreto e quindi, per la caratterizzazione min-max degli autovalori, risulta

$$\lambda_3 \leq \frac{\int |\nabla_{\mathbb{H}^n} w|^2\, \mathrm{d}\xi}{\int U_{\lambda_0,\eta_0}^{2^*-2} w^2\, \mathrm{d}\xi}, \quad \forall\, w \perp \mathbf{TM}_{c_0 U_{\lambda_0,\eta_0}}, \tag{2.4.14}$$

con l'uguaglianza se w è la terza autofunzione. Dunque, in particolare, la (2.4.14) varrà per $w = f - c_0 U_{\lambda_0,\eta_0}$.
Ora, poichè $(f - c_0 U_{\lambda_0,\eta_0}) \perp \mathbf{TM}_{c_0 U_{\lambda_0,\eta_0}}$, possiamo scrivere

$$f = c_0 U_{\lambda_0,\eta_0} \,+\, dv,$$

dove v ha norma 1 in S_0^1 ed è perpendicolare allo spazio tangente $\mathbf{TM}_{c_0 U_{\lambda_0,\eta_0}}$ e $d = d(f, \mathbf{M})$. Una espansione asintotica in d conduce alla seguente stima:

$$\begin{aligned}\int |f|^{2^*}\,\mathrm{d}\xi = \int |c_0\, U_{\lambda_0,\eta_0} \,+\, dv|^{2^*}\,\mathrm{d}\xi \\ =&|c_0|^{2^*} S^{-2^*/2} + d2^*|c_0|^{2^*-2} c_0 \int U_{\lambda_0,\eta_0}^{2^*-1} v\,\mathrm{d}\xi \\ &+ d^2 \frac{2^*(2^*-1)}{2} |c_0|^{2^*-2} \int U_{\lambda_0,\eta_0}^{2^*-2} v^2\,\mathrm{d}\xi \,+\, o(d^2) \\ \leq& |c_0|^{2^*} S^{-2^*/2} + d^2 |c_0|^{2^*-2} \frac{2^*(2^*-1)}{2}\frac{1}{\lambda_3} \,+\, o(d^2).\end{aligned}$$

Si noti che $\int U_{\lambda_0,\eta_0}^{2^*-1} v\,\mathrm{d}\xi \,=\, 0$, poichè $v \perp U_{\lambda_0,\eta_0}$ e $\Delta_{\mathbb{H}^n} U_{\lambda_0,\eta_0} \,+\, S^{2^*/2} U_{\lambda_0,\eta_0}^{2^*-1} = 0$, per cui

$$0 = \int \nabla_{\mathbb{H}^n} U_{\lambda_0,\eta_0} \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} v\,\mathrm{d}\xi \,=\, -\int v \Delta_{\mathbb{H}^n} U_{\lambda_0,\eta_0}\,\mathrm{d}\xi \,=\, S^{2^*/2} \int U_{\lambda_0,\eta_0}^{2^*-1} v\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Ora, tenendo conto che $\lambda_2 = (2^*-1)S^{2^*/2}$ ed elevando a $2/2^*$, si ottiene che

$$\begin{aligned}\left(\int |f|^{2^*}\,\mathrm{d}\xi\right)^{2/2^*} &\leq \left(|c_0|^{2^*} S^{-2^*/2} + d^2 |c_0|^{2^*-2} \frac{2^*}{2} S^{-2^*/2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \,+\, o(d^2)\right)^{2/2^*} \\ &= c_0^2\, S^{-1} \left(1 \,+\, c_0^{-2} d^2 \frac{2^*}{2}\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \,+\, o(d^2)\right)^{2/2^*} \\ &= c_0^2\, S^{-1} \left(1 \,+\, c_0^{-2} d^2 \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \,+\, o(d^2)\right) \\ &= c_0^2\, S^{-1} \,+\, d^2 S^{-1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \,+\, o(d^2).\end{aligned}$$

In conclusione, osservando che $\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 = c_0^2\, \|\nabla_{\mathbb{H}^n} U_{\lambda_0,\eta_0}\|_2^2 + d^2 = c_0^2 + d^2$, si ha

$$\begin{aligned}\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 - S\|f\|_{2^*}^2 &\geq \|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 \,-\, c_0^2 \,-\, d^2 \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \,+\, o(d^2) \\ &= d^2 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) \,+\, o(d^2).\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Dunque il lemma vale con $\alpha = (1 - \lambda_2/\lambda_3)$. Per verificare che questo risultato è ottimale, si può procedere come segue.
Consideriamo la funzione $f = U \,+\, dv$, dove v è la terza autofunzione di $\mathcal{L}_{1,0}$

e d è un numero positivo piccolo. Allora, se d è sufficientemente piccolo, si ha che $d(f, \mathbf{M}) = d$ e il punto più vicino ad f su $\mathbf{M}$ è U.
Ora, lo stesso argomento usato prima per ottenere la (2.4.15) conduce alla stima

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f\|_2^2 - S\|f\|_{2^*}^2 = d^2\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) + o(d^2),$$

questa volta con l'uguaglianza. □

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema principale.

Dimostrazione del Teorema 2.4.3. Il fatto che il risultato sia ottimale segue dall'ultima parte della dimostrazione del lemma precedente.
Assumiamo per assurdo che il teorema non sia vero. Allora, esiste una successione $\{f_m\} \subset S_0^1(\mathbb{H}^n)$ tale che

$$\frac{\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f_m\|_2^2 - S\|f_m\|_{2^*}^2}{d(f_m, \mathbf{M})^2} \to 0, \quad \text{per } m \to \infty$$

Grazie all'omogeneità del precedente rapporto, possiamo assumere che $\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f_m\|_2^2 = 1$. Inoltre, poichè $d(f_m, \mathbf{M}) \leq \|\nabla_{\mathbb{H}^n} f_m\|_2 = 1$, a meno di sottosuccessioni estratte possiamo assumere che

$$d(f_m, \mathbf{M}) \to L \in [0, 1].$$

Ora, se $L = 0$, si ha direttamente una contraddizione dal lemma precedente.
L'altra possibilità è che sia $L > 0$. In questo caso si deve avere

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} f_m\|_2^2 - S\|f_m\|_{2^*}^2 \to 0, \;\; \|\nabla_{\mathbb{H}^n} f_m\|_2 = 1.$$

Dal principio di concentrazione-compattezza di P. L. Lions (si veda il corollario 1.2 della Sezione I.4 in [38], Parte I) opportunamente adattato al contesto del gruppo di Heisenberg, otteniamo che esistono due successioni λ_m, η_m, tali che

$$\lambda_m^{(Q-2)/2} f_m(\delta_{\lambda_m}(\eta_m^{-1} \circ \xi)) \to +U \;(\text{o } -U) \;\text{ in } S_0^1(\mathbb{H}^n) \quad \text{per } m \to \infty.$$

Questo implica che

$$d(f_m, \mathbf{M}) = d\left(\lambda_m^{(Q-2)/2} f_m\left(\delta_{\lambda_m}(\eta_m^{-1} \circ \cdot)\right), \mathbf{M}\right) \to 0, \quad \text{per } m \to \infty,$$

contraddicendo l'ipotesi $L > 0$. □

Capitolo 3

Disuguaglianze di Sobolev con termini di resto per l'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$

Introduzione

In analogia con quanto dimostrato per la classe dei sublaplaciani nel precedente capitolo, ci si è chiesto se fosse possibile ottenere risultati simili per altri operatori ellittico-degeneri. Si è, dunque, affrontato il problema delle disuguaglianze di Sobolev con termini di resto per l'operatore definito su $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^n_y$ da

$$\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y, \quad \alpha > 0$$

introdotto e descritto nel Capitolo 1. Sia Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^N$. Denotato con $X = (X_1, \ldots, X_N)$ il sistema di campi

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ per } i = 1, \ldots, m, \quad X_{i+m} = |x|^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i} \text{ per } i = 1, \ldots, n \tag{3.0.1}$$

che realizza $\mathcal{L}$ come "somma di quadrati", ovvero

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} X_i^2$$

indicheremo come in precedenza con $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ lo spazio ottenuto come completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma

$$u \longmapsto \|Xu\|_2$$

(Si osservi che la precedente costituisce una norma su $C_0^\infty(\Omega)$ per qualunque insieme Ω, grazie alla validità della disuguaglianza di Sobolev). Dunque $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $a(u,v) = \int_\Omega < Xu, Xv >$. Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, lo spazio sarà denotato semplicemente con $\mathcal{D}^1_X(\mathbb{R}^N)$.

Sia, ora, Ω limitato. Il nostro intento è stato quello di capire quando fosse possibile aggiungere un termine di resto alla disuguaglianza di Sobolev ottimale su Ω, ovvero la disuguaglianza

$$\|Xu\|^2_{L^2(\Omega)} \geq S(\Omega)\|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \quad \forall\, u \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega) \tag{3.0.2}$$

con costante ottimale $S(\Omega) = \inf\limits_{u \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)} \frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|^2_{2^*}}$. Si fa notare che in questo caso, non essendo l'operatore invariante per alcuna traslazione di gruppo, per un dominio generico Ω non è possibile affermare che $S(\Omega)$ non dipenda da Ω.

D'altro canto, grazie all'invarianza rispetto alle dilatazioni δ_λ del quoziente $\frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|^2_{2^*}}$, questa proprietà vale per domini Ω contenenti l'origine e, più in generale, per domini intersecanti l'insieme di degenerazione $\{x = 0\}$, grazie all'invarianza del sistema X rispetto alle traslazioni euclidee nella variabile y. In particolare, per questi domini $S(\Omega)$ coincide con la miglior costante $S(\mathbb{R}^N)$ (mentre, ovviamente, $S(\Omega) \geq S(\mathbb{R}^N)\ \forall\, \Omega$, essendo $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ un sottoinsieme di $\mathcal{D}^1_X(\mathbb{R}^N)$).

Infatti, sia $\{u_m\} \subset \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\mathbb{R}^N)$ una successione minimizzante per $S(\mathbb{R}^N)$; per densità di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ in $S^1(\mathbb{R}^N)$ possiamo assumere $\{u_m\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Se Ω è un aperto che interseca l'insieme $\{x = 0\}$, possiamo assumere che $0 \in \Omega$, data l'invarianza delle norme coinvolte rispetto alle traslazioni euclidee nella variabile y. Riscalando le u_m mediante le dilatazioni δ_λ, ovvero considerando le funzioni:

$$u_{\lambda_m} = u_m \circ \delta_{\lambda_m}$$

per λ_m sufficientemente grandi si ha che

$$u_{\lambda_m} \in C_0^\infty(\Omega)$$

e quindi, grazie all'invarianza rispetto alle dilatazioni δ_λ del quoziente $\frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|^2_{2^*}}$, essendo $\|Xu_\lambda\|_2^2 = \lambda^{2-Q}\|Xu\|_2^2$ e $\|u_\lambda\|^2_{2^*} = \lambda^{2-Q}\|u\|^2_{2^*}$, risulta:

$$S(\Omega) \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{\|Xu_{\lambda_m}\|_2^2}{\|u_{\lambda_m}\|^2_{2^*}} = \liminf_{m\to\infty} \frac{\|Xu_m\|_2^2}{\|u_m\|^2_{2^*}} = S(\mathbb{R}^N)$$

da cui

$$S(\Omega) = S(\mathbb{R}^N) = S.$$

Confiniamo, dunque, la nostra analisi a questa classe di domini, ai quali si riesce ad applicare perfettamente l'argomento di Brezis-Lieb, ottenendo un termine di resto per la disuguaglianza (3.0.2).

Una difficoltà aggiuntiva rispetto al caso dei sublaplaciani si è incontrata nel determinare la stima L^∞ in (2.2.8) richiesta nella dimostrazione. L'argomento di confronto usato nel caso dei sublaplaciani utilizzava, infatti, precise stime di sommabilità L^p-deboli per la soluzione fondamentale dell'operatore coinvolto. In questo caso, abbiamo ottenuto la stima richiesta, utilizzando le proprietà di integrabilità uniformi delle cosiddette *funzioni di Green approssimate* dell'operatore $\mathcal{L}$ descritte nella Proposizione 1.2.17 (si veda il Lemma 3.1.1 nel paragrafo seguente).

La dimostrazione del risultato sinora illustrato è seguita da alcune considerazioni su come esso possa essere esteso ad alcune generalizzazioni dell'operatore $\Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, come ad esempio l'operatore definito su $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{N_r}$ da

$$\mathcal{L} = \Delta_{(1)} + |x^{(1)}|^{2b_{21}}\Delta_{(2)} + \ldots + |x^{(1)}|^{2b_{r1}}|x^{(2)}|^{2b_{r2}} \ldots |x^{(r-1)}|^{2b_{r\,r-1}}\Delta_{(r)}$$

dove $x^{(j)} \in \mathbb{R}^{N_j}$ e $\Delta_{(j)}$ denota il Laplaciano in $\mathbb{R}^{N_j}$ per $j = 1, \ldots, r$, e i b_{ji} sono numeri reali non negativi.

Infine, sono riportate alcune considerazioni di ottimalità analoghe a quelle fatte per la disuguaglianza "migliorata" sul gruppo di Heisenberg.

3.1 La disuguaglianza di Sobolev con termine di resto

Come annunciato, dimostriamo in questa sezione la disuguaglianza di Sobolev con termini di resto per i campi (3.0.1), per aperti limitati intersecanti l'insieme di degenerazione dei campi. Al teorema si premette il seguente lemma:

Lemma 3.1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ un aperto limitato ed A un qualunque sottoinsieme misurabile di Ω. Allora la soluzione in $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ del problema*

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = 1_A & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.1}$$

soddisfa la seguente stima:

$$\|u\|_\infty \leq C|A|^{2/Q}.$$

Dimostrazione. Per definizione, la soluzione in $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ del problema (3.1.1) è l' unica funzione $u \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ tale che $a(u,\varphi) = \int_\Omega 1_A\, \varphi$ per ogni $\varphi \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$. Ora, sia G^ρ_y la funzione di Green approssimata di $\mathcal{L}$ per Ω con polo $y \in \Omega$ e $Q_\rho(y) = Q(y,\rho)$ la δ-sfera di centro y e raggio ρ. Allora

$$⨍_{Q_\rho(y)} u = a(G^\rho_y, u) = a(u, G^\rho_y) = \int_\Omega 1_A\, G^\rho_y$$

da cui

$$|⨍_{Q_\rho} u| = |\int_\Omega 1_A\, G^\rho_y| = \int_A G^\rho_y \leq C\,|A|^{2/Q}$$

con C indipendente da ρ e da y, dove l'ultima disuguaglianza segue dalla stima $L^{\frac{Q}{Q-2}}$-debole dimostrata nella Proposizione 1.2.17, essendo $Q/2$ l'esponente coniugato di $Q/(Q-2)$.
Ora, facendo tendere $\rho \to 0$, si può concludere che

$$|u(y)| \leq C\,|A|^{2/Q} \quad \text{q.o. } y \in \Omega,$$

come richiesto dalla tesi. $\square$

Possiamo, ora, procedere alla dimostrazione del teorema.

Teorema 3.1.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ un aperto limitato, $\Omega \cap \{x = 0\} \neq \emptyset$. Allora, esiste una costante $C = C(\Omega) > 0$ tale che*

$$\|Xf\|_2^2 \geq S\|f\|^2_{2^*} + C(\Omega)\|f\|^2_{\frac{Q}{Q-2},w} \qquad \forall f \in \overset{o}{D}{}^1_X(\Omega) \tag{3.1.2}$$

dove $Q = m + (\alpha+1)n$ è la dimensione naturalmente associata all'omogeneità di X, $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$ ed S la miglior costante per l'embedding $\overset{o}{D}{}^1_X(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, i.e.

$$S = \inf_{u \in \overset{o}{D}{}^1_X(\Omega)} \frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|^2_{2^*}} = \inf_{u \in D^1_X(\mathbb{R}^N)} \frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|^2_{2^*}}.$$

Dimostrazione. Seguendo la dimostrazione del Teorema 2.2.3, sia $f \in \overset{o}{D}{}^1_X(\Omega)$ ed assumiamo che $f \geq 0$. Sia $g \in L^\infty(\Omega)$ ed u la soluzione in $\overset{o}{D}{}^1_X(\Omega)$ di

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = g & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.3}$$

e definiamo

$$\phi = f + u + \|u\|_\infty v \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

dove f ed u si intendono estese a zero fuori da Ω e v è il "potenziale capacitario di Ω rispetto al sistema di vettori X, definito come segue, analogamente al caso dei sublaplaciani. Si consideri il funzionale norma

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |Xu|^2 \,\mathrm{d}x$$

sullo spazio di Hilbert $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\mathbb{R}^N)$, che denoteremo semplicemente con $\mathcal{D}^1_X(\mathbb{R}^N)$, e consideriamo l'estremo inferiore di J sull'insieme

$$\Gamma = \{u \in \mathcal{D}^1_X(\mathbb{R}^N) \mid u \geq 1 \text{ su } \Omega \text{ nel senso di } \mathcal{D}^1_X(\mathbb{R}^N)\}.$$

Denoteremo questo estremo inferiore con $\mathrm{cap}_X(\Omega)$ e lo chiameremo la *X-capacità di* Ω.
Poichè Γ è un insieme chiuso convesso, questo estremo inferiore è assunto da un'unica funzione $v \in \mathcal{D}^1_X(\mathbb{R}^N)$, che chiameremo *$X$-potenziale capacitario di* Ω. Come prima, è facile verificare che $v \equiv 1$ su Ω (nel senso di $\mathcal{D}^1_X$).
Dunque, la disuguaglianza di Sobolev in tutto lo spazio applicata a ϕ conduce a

$$\int |X(f+u)|^2 + \|u\|^2_\infty \int |Xv|^2 \geq S\|\phi\|^2_{2^*} \geq S\|f\|^2_{2^*}$$

e seguendo la dimostrazione nel caso dei sublaplaciani, si ottiene

$$\int |Xf|^2 \geq S\|f\|^2_{2^*} + \left(\int_A f\right)^2 \Big/ \left[\int |Xu|^2 + k\|u\|^2_\infty\right] \tag{3.1.4}$$

dove $k = \mathrm{cap}_X(\Omega)$, A è un sottoinsieme arbitrario di Ω e u è la soluzione in $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ di

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 1_A & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Nuovamente, dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene la stima

$$\int |Xu|^2 \leq C|A|^{1+2/Q} \tag{3.1.6}$$

mentre la stima

$$\|u\|_\infty \leq C'|A|^{2/Q} \tag{3.1.7}$$

è dimostrata nel Lemma 3.1.1 .
Quindi, usando le (3.1.6) e (3.1.7) e prendendo l'estremo superiore su tutti gli insiemi A in (3.1.4), si ottiene la tesi, con $C(\Omega) = C_Q/\mathrm{cap}_X(\Omega)$. □

3.2 Alcune generalizzazioni

Tutti gli argomenti usati nella precedente sezione al fine di ottenere un termine di resto nella disuguaglianza di Sobolev si applicano, ad esempio, alla seguente generalizzazione dell'operatore $\Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, ovvero all'operatore definito su $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{N_r}$ come segue

$$\mathcal{L} = \Delta_{(1)} + |x^{(1)}|^{2b_{21}}\Delta_{(2)} + \ldots + |x^{(1)}|^{2b_{r1}}|x^{(2)}|^{2b_{r2}} \ldots |x^{(r-1)}|^{2b_{r\,r-1}}\Delta_{(r)}$$

dove $x^{(j)} \in \mathbb{R}^{N_j}$ e $\Delta_{(j)}$ denota il Laplaciano in $\mathbb{R}^{N_j}$ per $j = 1, \ldots, r$, e i b_{ji} sono numeri reali nonnegativi.

Anche in questo caso, una disuguaglianza di Sobolev associata ad $\mathcal{L}$ può essere dedotta dai risultati in [21] e può essere migliorata su domini limitati contenenti l'origine mediante l'approccio di Brezis-Lieb.
Vediamo, innanzitutto, quale numero assume il ruolo della dimensione omogenea Q in questo caso.
Si noti che l'operatore $\mathcal{L}$ si può scrivere come somma di quadrati di N campi vettoriali localmente Lipschitziani nel seguente modo:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{N_j} \left(X_i^{(j)}\right)^2 \tag{3.2.1}$$

dove

$$
\begin{aligned}
X_i^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}} \qquad \text{per } i = 1, \ldots, N_1 \\
X_i^{(2)} &= |x^{(1)}|^{b_{21}} \frac{\partial}{\partial x_i^{(2)}} \qquad \text{per } i = 1, \ldots, N_2 \\
&\vdots \\
X_i^{(r)} &= |x^{(1)}|^{b_{r1}} |x^{(2)}|^{b_{r2}} \ldots |x^{(r-1)}|^{b_{r\,r-1}} \frac{\partial}{\partial x_i^{(r)}} \qquad \text{per } i = 1, \ldots, N_r
\end{aligned}
\tag{3.2.2}
$$

In virtù dell'omogeneità dei coefficienti, ai campi $X_i^{(j)}$ si associa in modo naturale la seguente famiglia di dilatazioni anisotrope:

$$\delta_\lambda(x) = (\lambda^{G_1} x^{(1)}, \lambda^{G_2} x^{(2)}, \ldots, \lambda^{G_r} x^{(r)}), \tag{3.2.3}$$

dove $G_1 = 1$ e $G_j = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} b_{ji} G_i$ per $j = 1, \ldots, r$, risultando i campi $X_i^{(j)}$ omogenei di grado 1 rispetto alle suddette dilatazioni. Verifichiamo, infatti, che

$$X_i^{(j)}(f \circ \delta_\lambda) = \lambda\,(X_i^{(j)} f) \circ \delta_\lambda. \tag{3.2.4}$$

Risulta:

$$X_i^{(1)}(f \circ \delta_\lambda)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}(f \circ \delta_\lambda)(x) = \lambda^{G_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}} \right) (\delta_\lambda(x))$$

e

$$
\begin{aligned}
X_i^{(j)}(f \circ \delta_\lambda)(x) &= |x^{(1)}|^{b_{j1}} |x^{(2)}|^{b_{j2}} \ldots |x^{(j-1)}|^{b_{j\,j-1}} \frac{\partial}{\partial x_i^{(j)}} (f \circ \delta_\lambda)(x) \\
&= |x^{(1)}|^{b_{j1}} |x^{(2)}|^{b_{j2}} \ldots |x^{(j-1)}|^{b_{j\,j-1}} \lambda^{G_j} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(j)}} (\delta_\lambda(x)) \\
&= |\lambda^{G_1} x^{(1)}|^{b_{j1}} |\lambda^{G_2} x^{(2)}|^{b_{j2}} \ldots |\lambda^{G_{j-1}} x^{(j-1)}|^{b_{j\,j-1}} \lambda^{G_j - \sum_{i=1}^{j-1} b_{ji} G_i} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(j)}} (\delta_\lambda(x)) \\
&= \lambda^{G_j - \sum_{i=1}^{j-1} b_{ji} G_i} \left(X_i^{(j)} f \right) (\delta_\lambda(x)), \quad 1 < j \leq r,\ 1 < i \leq N_j
\end{aligned}
$$

da cui, scegliendo $G_1 = 1$ e $G_j = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} b_{ji} G_i$ per $j = 1, \ldots, r$, si ottiene la (3.2.4).

Di conseguenza, l'operatore $\mathcal{L}$ è omogeneo di grado 2 rispetto alle dilatazioni δ_λ e il ruolo di dimensione omogenea Q è assunto dal numero

$$Q = \sum_{j=1}^{r} N_j\, G_j,$$

essendo λ^Q lo jacobiano delle dilatazioni δ_λ.
Ora, denotato con $X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(r)})$ il sistema di vettori definito dalla (3.2.2), dai teoremi di embedding in [21] si ricava che:

$$W^{1,2}_X(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^{(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(r)})}(\mathbb{R}^N)$$

ove $\varepsilon^{(j)} = (\varepsilon^{(j)}_1, \ldots, \varepsilon^{(j)}_{N_j}) = ((G_j)^{-1}, \ldots, (G_j)^{-1})$ per $j = 1, \ldots, r$, e poichè per lo spazio ordinario anisotropo al secondo membro della precedente vale l'embedding

$$H^{(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(r)})}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

per

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ 1 \leqslant i \leqslant N_j}} 1/\varepsilon^{(j)}_i}$$

ove il secondo membro è pari ad $1/Q$, si ottiene anche in questo caso la disuguaglianza di Sobolev

$$\|Xu\|_2^2 \geq C\, \|u\|^2_{2^*} \qquad \forall\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

con $2^* = 2Q/(Q-2)$.
Ora, se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ contenente l'origine, la miglior costante di Sobolev su Ω coincide con la miglior costante relativa all'intero spazio, grazie all'invarianza del rapporto $\frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|^2_{2^*}}$ rispetto alle dilatazioni δ_λ. Per questa classe di aperti, dunque, si riscrive in modo perfettamente analogo il risultato illustrato nella sezione precedente.

3.3 Considerazioni di ottimalità

Dedichiamo quest'ultimo paragrafo del capitolo ad alcune considerazioni di ottimalità. Ricordiamo che nel caso della disuguaglianza di Sobolev sul gruppo

di Heisenberg è stato possibile dimostrare che il nostro risultato è ottimale nell'ambito degli spazi L^p, nel senso che la disuguaglianza non ammette la norma $L^{\frac{Q}{Q-2}}$ come termine di resto (si veda la Sezione 2.4.1). Ciò è stato possibile grazie alla conoscenza esplicita dei minimizzanti di Sobolev, che hanno consentito la realizzazione di stime asintotiche alla Brezis- Nirenberg, conducendo al risultato.
Nel caso dell'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, poco è noto circa gli estremali della disuguaglianza di Sobolev. Segnaliamo, però, che nel caso $\alpha = 1$, essi sono stati determinati da Beckner [1] nel caso di dimensioni basse.
In particolare, usando la simmetria iperbolica e la geometria conforme, Beckner dimostra i seguenti risultati:

Teorema 3.3.1. $\forall f \in C^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\left[\|f\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}\right]^2 \leq \pi^{-2/3} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 4x^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.3.1}$$

La disuguaglianza è ottimale, e un estremale è dato dalla funzione

$$\left[(1 + |x|^2)^2 + |y|^2\right]^{-1/4}.$$

Teorema 3.3.2. $\forall f \in C^1(\mathbb{R}^3)$:

$$\left[\|f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\right]^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2} \left[|\nabla_x f|^2 + 4x^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.3.2}$$

La disuguaglianza è ottimale, e un estremale è dato dalla funzione

$$\left[(1 + |x|^2)^2 + |y|^2\right]^{-1/2}.$$

Dai risultati di Beckner segue che, almeno per le dimensioni omogenee $Q = 3, 4$, i minimizzanti per la disuguaglianza di Sobolev relativa ad $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^2\Delta_y$ sono costituiti dalla famiglia di funzioni

$$U_\varepsilon(x, y) = \frac{C_\varepsilon}{((\varepsilon + |x|^2)^2 + 4|y|^2)^{\frac{Q-2}{4}}}$$

dove $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon = C\varepsilon^{\frac{Q-2}{4}}$.
Dunque, posto $\tilde{U}_\varepsilon = \frac{U_\varepsilon}{C_\varepsilon}$, risulta che

$$\tilde{U}_\varepsilon \to \Gamma(x, y) = \frac{1}{(|x|^4 + 4|y|^2)^{\frac{Q-2}{4}}} \qquad \text{per } \varepsilon \to 0$$

ove Γ è, a meno di costanti, la soluzione fondamentale dell'operatore $\mathcal{L}$ con polo nell'origine (si confronti il paragrafo 1.2.1).
I risultati di Beckner sopra richiamati ci consentono, almeno per le dimensioni da lui trattate, di stabilire l'ottimalità del nostro risultato, in maniera perfettamente analoga al caso $\mathbb{H}^n$. Richiamiamo brevemente il tipo di argomentazione usato.

Sia Ω un dominio intersecante l'insieme $\{x = 0\}$. Assumiamo per semplicità che $0 \in \Omega$ (ipotesi non restrittiva, data l'invarianza dell'operatore rispetto alle traslazioni euclidee nella variabile y). Stimiamo il rapporto

$$R(u) = \frac{\|Xu\|_2^2 - S\|u\|_{2*}^2}{\|u\|_q^2} \tag{3.3.3}$$

nelle funzioni

$$u_\varepsilon = \varphi(x,y)U_\varepsilon(x,y)$$

ove φ è una funzione di cut-off su Ω, i.e. $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi \equiv 1$ in un intorno di 0.
Essendo:

$$\|Xu_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} U_\varepsilon^{2^*}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Omega |X\varphi|^2 U_\varepsilon^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + O(\varepsilon^{Q/2})$$

e

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} U_\varepsilon^{2^*}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + O(\varepsilon^{Q/2})$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} R(u_\varepsilon) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |X\varphi|^2\, {U_\varepsilon}^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ + o(C_\varepsilon^2)}{\displaystyle(\int_\Omega \varphi^q\, U_\varepsilon^q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^{2/q}} \\ &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2\, \tilde{U}_\varepsilon^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ + o(1)}{\displaystyle(\int_\Omega \varphi^q\, \tilde{U}_\varepsilon^q\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^{2/q}} \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto che $\tilde{U}_\varepsilon \to \Gamma$ per $\varepsilon \to 0$, e che Γ non è L^q-sommabile in 0 per $q \ge Q/(Q-2)$, risulta che per tali q il denominatore in $R(u_\varepsilon)$ esplode, mentre il numeratore si mantiene limitato, essendo $\varphi = \mathit{const}$ in un intorno di zero.

Dunque, per $q \geq Q/(Q-2)$ il quoziente $R(u)$ non può essere limitato dal basso in $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ da alcuna costante positiva C, e ciò equivale a dire che la norma L^q, con $q \geq Q/(Q-2)$, non è ammissibile come termine di resto nella disuguaglianza di Sobolev relativa all'operatore $\Delta_x + |x|^2\Delta_y$.

Si osservi, in particolare, che nel caso $Q = 3$ la disuguaglianza (3.3.1) ammette la norma L^2 come termine di resto. Questa circostanza, alla luce del principio formulato nel contesto ellittico da Gazzola e Grunau in [28] e richiamato nell'osservazione 2.4.2, suggerisce di investigare la "criticità" della dimensione omogenea $Q = 3$ per l'operatore $\Delta_x + |x|^2\Delta_y$. Questo tema sarà affrontato nel Capitolo 4.

Capitolo 4

Il problema critico per gli operatori $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ e $\Delta_x + |x|^2\Delta_y$

Introduzione

Questo capitolo è dedicato allo studio di problemi "critici" nel senso delle immersioni di Sobolev per alcuni degli operatori subellittici sinora introdotti. Più precisamente, si studia l'analogo del problema di Brezis-Nirenberg per gli operatori $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ e $\Delta_x + |x|^2\Delta_y$.

La prima parte del capitolo tratta il seguente problema critico per il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u &= u^{2^*-1} + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u &> 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.0.1}$$

dove $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$, $Q = 2n+2$ è la dimensione omogenea di $\mathbb{H}^n$ e Ω è un aperto limitato regolare di $\mathbb{H}^n$.
Ricordiamo che il problema (4.0.1) è stato studiato da Citti in [12] (si veda anche [11]).
Si noti che l'esponente $\frac{2Q}{Q-2}$ è critico per il problema di Dirichlet semilineare per il Laplaciano di Kohn, così come $\frac{2N}{N-2}$ è critico per l'equazione di Poisson semilineare, dal momento che, se Ω è limitato, l'immersione

$$S_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \tag{4.0.2}$$

è compatta per $1 \leq p < \frac{2Q}{Q-2}$, mentre è solo continua per $p = \frac{2Q}{Q-2}$ (si veda [18], [24]). Questa circostanza non consente l'utilizzo di metodi variazionali standard. Si richiede, quindi, l'uso di tecniche più sofisticate, analoghe a quelle introdotte nel caso del Laplaciano classico da Brezis e Nirenberg nel famoso lavoro [7].

Ricordiamo che Brezis e Nirenberg mettono in luce un interessante fenomeno: le condizioni per l'esistenza di soluzioni del problema (4.0.1) per il Laplaciano classico risultano sorprendentemente differenti quando $N = 3$ e quando, invece, $N \geq 4$. Infatti, in dimensione $N \geq 4$ l'analogo del problema (4.0.1) per il Laplaciano su $\mathbb{R}^N$ ammette soluzioni per ogni $0 < \lambda < \lambda_1$, mentre per $N = 3$ il problema non ammette soluzione per λ in un intorno destro di 0. La dimensione $N = 3$ viene per questo detta "critica".

Nel caso del Laplaciano subellittico su $\mathbb{H}^n$, invece, questo fenomeno non si verifica. Infatti, come dimostrato nel Teorema 4.2.1, il problema ammette soluzioni per ogni $0 < \lambda < \lambda_1$, ove λ_1 è il primo autovalore di Dirichlet di $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$.
Come si può osservare dal confronto tra le stime asintotiche realizzate per studiare il caso Heisenberg e quelle euclidee, l'assenza di dimensioni critiche per il Laplaciano di Kohn è dovuta sostanzialmente al fatto che il ruolo della dimensione spaziale è qui assunto dalla dimensione omogenea $Q = 2n + 2$ che è sempre maggiore o uguale a 4.

La seconda parte del capitolo è dedicata ad alcuni nostri risultati sul seguente problema "critico" per l'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^2\Delta_y$:

$$\begin{cases} -(\Delta_x u + |x|^2\Delta_y u) & = & u^{2^*-1} + \lambda u & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^n_y \\ u & > & 0 & \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.0.3}$$

dove $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$, $Q = m + 2n$ è la dimensione omogenea di $\mathbb{R}^N$ rispetto all'operatore $\mathcal{L}$ e Ω è un aperto limitato regolare di $\mathbb{R}^N$ intersecante l'insieme $\{x = 0\}$ di degenerazione dell'operatore.
La conoscenza esplicita, almeno in dimensioni basse, dei minimizzanti della disuguaglianza di Sobolev associata ad $\mathcal{L}$, ci consente di confrontare le dimensioni $Q = 3$ e $Q = 4$ in merito alla risolubilità del problema (4.0.3) mediante l'approccio di Brezis-Nirenberg e di rilevare la "criticità" della dimensione omogenea $Q = 3$. Si prova, infatti, mediante un argomento "alla Pohozaev", che su domini di particolare simmetria il problema (4.0.3) non ammette soluzioni per λ sufficientemente piccoli.

4.1 Identità di tipo-Pohozaev su $\mathbb{H}^n$

In questa sezione riportiamo alcune identità integrali dovute a Garofalo e Lanconelli [24], che generalizzano al contesto subellittico di $\mathbb{H}^n$ la ben nota identità di Pohozaev per le equazioni di Poisson semilineari su $\mathbb{R}^N$. Queste identità costituiscono uno strumento di fondamentale importanza per il conseguimento di risultati di non esistenza per i problemi semilineari in esame.
Si consideri il seguente problema di Dirichlet associato a $\Delta_{\mathbb{H}^n}$:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u &= f(u) \quad \text{in } \Omega \\ \quad u &= 0 \quad\quad \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Com'è noto dal contesto ellittico, una identità di tipo-Pohozaev si ottiene moltiplicando l'equazione (4.1.1) per Vu, dove $V = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\partial_{x_i}$ è un opportuno campo vettoriale e applicando il teorema della divergenza. Ciò che si ottiene è una identità tra integrali di volume e integrali di superficie, i cui segni, per opportune scelte di V e su domini di particolare simmetria, possono risultare incompatibili con l'esistenza di soluzioni non banali del problema.
Nel caso in esame, una "buona" scelta per il campo vettoriale V si rivela essere quella del generatore infinitesimale delle dilatazioni naturali su $\mathbb{H}^n$, ovvero il generatore del gruppo ad un parametro delle dilatazioni

$$\delta_\lambda(z,t) = (\lambda z, \lambda^2 t).$$

Si tratta del seguente campo vettoriale su $\mathbb{R}^{2n+1}$:

$$Zu = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} u \circ \delta_\lambda\right]_{\lambda=1} = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) + 2t\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.1.2}$$

Il campo Z è caratterizzato dalla proprietà che una funzione $u : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ è omogenea di grado $k \in \mathbb{R}$ rispetto alle dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$, ovvero

$$u(\delta_\lambda(\xi)) = \lambda^k u(\xi) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{H}^n$$

se e solo se

$$Zu = ku.$$

Nel seguito, se $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ è un aperto limitato, denoteremo con $\Gamma^2(\overline{\Omega})$ lo spazio delle funzioni continue $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ con $X_j u, Y_j u, X_j^2 u, Y_j^2 u$ continue in Ω e prolungabili per continuità su tutto $\overline{\Omega}$.
La classica identità di Pohozaev nel contesto del gruppo di Heisenberg si riscrive come segue.

Teorema 4.1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ un aperto limitato, C^1 a tratti e sia $u \in \Gamma^2(\overline{\Omega})$ soluzione del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione localmente Lipschitziana t.c. $f(0) = 0$, con primitiva $F(u) = \int_0^u f(\nu)\mathrm{d}\nu$. Allora, u soddisfa l'identità

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 < Z, N > \mathrm{d}H_{Q-2} = \int_{\Omega} \big[2QF(u) - (Q-2)u\, f(u)\big]\mathrm{d}z\mathrm{d}t \quad (4.1.3)$$

ove Z è il campo vettoriale generatore delle dilatazioni δ_λ definito nella (4.1.2)*, N è la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$* e $\mathrm{d}H_{Q-2}$ *denota la misura di Hausdorff $(Q-2)$-dimensionale in $\mathbb{H}^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dall'identità integrale dimostrata da Garofalo e Lanconelli in [24, Teor. 2.1].

L'identità di tipo-Pohozaev (4.1.3) sopra richiamata conduce ad interessanti risultati di non esistenza qualora l'insieme Ω appartenga ad una particolare classe di domini.
Illustriamo a tal proposito la definizione di insieme δ_λ-*stellato*, introdotta da Garofalo e Lanconelli in [24], che generalizza al contesto in esame la classica definizione di stellatezza euclidea. In quanto segue $\tau_{(z_0,t_0)}(z,t) = (z_0,t_0) \circ (z,t)$ denoterà l'operazione di traslazione a sinistra su $\mathbb{H}^n$ di elemento (z_0, t_0).

Definizione 4.1.2. *(*INSIEME δ_λ-STELLATO*) Un aperto $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ C^1 a tratti si dirà δ_λ-* stellato *rispetto ad un punto $(z_0, t_0) \in \Omega$ se, denotata con N la normale unitaria esterna alla frontiera di $\tau_{(z_0,t_0)^{-1}}(\Omega)$, si ha*

$$Z \cdot N \geq 0 \quad (4.1.4)$$

in ogni punto regolare di $\partial(\tau_{(z_0,t_0)^{-1}}(\Omega))$.
*Diremo che Ω è δ_λ-*strettamente stellato *rispetto ad un punto (z_0, t_0) se risulta*

$$Z \cdot N > 0 \quad \text{su } \partial(\tau_{(z_0,t_0)^{-1}}(\Omega)). \quad (4.1.5)$$

Osserviamo che la precedente definizione coincide con l'usuale definizione di stellatezza nel caso di dilatazioni isotrope. In tal caso, infatti, il campo Z altro non è che $Z = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e quindi la condizione (4.1.4) si riscrive come $x \cdot N \geq 0$.

Esempio 4.1.3. *Se d è una norma δ_λ-omogenea su $\mathbb{H}^n$, è facile verificare che le sfere per la distanza indotta da d sono insiemi δ_λ-strettamente stellati rispetto al proprio centro. Infatti, si consideri la d-sfera di centro 0 e raggio R, ovvero*

$$B_d(0,R) = \{\xi \in \mathbb{H}^n \mid d(\xi) < R\}$$

Allora, essendo $N = \frac{\nabla d}{|\nabla d|}$ su ∂B_R, risulta:

$$< Z, N >=< Z, \frac{\nabla d}{|\nabla d|} >= \frac{Zd}{|\nabla d|} = \frac{R}{|\nabla d|} > 0 \quad \text{su } \partial B_R$$

ove si è usato che d è una funzione omogenea di grado 1 rispetto alle dilatazioni, per cui $Zd = d$.

Elenchiamo qui di seguito alcune conseguenze immediate dell'identità di Pohozaev e delle definizioni appena introdotte.

Teorema 4.1.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ un aperto limitato regolare strettamente δ_λ-stellato rispetto ad un punto $(z_0, t_0) \in \Omega$. Allora il problema*

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u &= f(u) \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1.6}$$

non ha soluzioni non-negative non banali $u \in \Gamma^2(\overline{\Omega})$, se f è localmente Lipschitziana, $f(0) = 0$ e

$$2QF(u) - (Q-2)uf(u) \leq 0 \quad \text{per } u \geq 0. \tag{4.1.7}$$

Dimostrazione. Trasliamo (z_0, t_0) nell'origine e consideriamo la funzione $v(z,t) = u(\tau_{(z_0,t_0)^{-1}}(z,t))$ nell'insieme $\tau_{(z_0,t_0)^{-1}}(\Omega)$. La funzione v soddisfa la stessa equazione di u in $\tau_{(z_0,t_0)^{-1}}(\Omega)$ e $v \in \Gamma^2(\overline{\tau_{(z_0,t_0)^{-1}}(\Omega)})$. Dunque, possiamo supporre sin dal principio che $0 \in \Omega$ e che $X \cdot N > 0$ su $\partial\Omega$. Dall'identità (4.1.3) e dall'ipotesi $X \cdot N > 0$ su $\partial\Omega$, segue che

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \equiv 0 \text{ su } \partial\Omega. \tag{4.1.8}$$

Ora, ricordando che denotata con A la seguente matrice $(2n+1) \times (2n+1)$:

$$A = \begin{pmatrix} I_{\mathbb{R}^n} & 0 & 2y \\ 0 & I_{\mathbb{R}^n} & -2x \\ 2y & -2x & 4|x|^2 \end{pmatrix}$$

risulta

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} u = \operatorname{div}(A\nabla u) \text{ e } |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 = A\nabla u \cdot \nabla u$$

dalla (4.1.8) segue che $A\nabla u \cdot N = 0$ su $\partial\Omega$, per cui

$$0 = \int_{\partial\Omega} A\nabla u \cdot N = \int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u) = \int_\Omega \Delta_{\mathbb{H}^n} u = \int_\Omega u^p$$

da cui $u \equiv 0$ in Ω. □

Osserviamo subito che nel caso

$$f(u) = u^{p-1} + \lambda u \quad p > 1,$$

la condizione di non esistenza (4.1.7) si riscrive come segue

$$2\lambda u^2 + \frac{Q-2}{p}\left(\frac{2Q}{Q-2} - p\right) u^p \leq 0 \quad \text{per } u \geq 0.$$

Quindi, se $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ è un aperto limitato regolare strettamente δ_λ-stellato rispetto ad un punto $(z_0, t_0) \in \Omega$, il problema

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u & = & u^{p-1} + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u & > & 0 & \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1.9}$$

non ha sicuramente soluzione nei seguenti due casi:

1. $\lambda = 0$ e $p \geq \frac{2Q}{Q-2}$;

2. $\lambda \leq 0$ e $p = \frac{2Q}{Q-2}$.

Osservazione 4.1.5. Sottolineamo esplicitamente che l'ipotesi di stellatezza è essenziale nella proposizione precedente. Infatti, in [24] si dimostra che il problema (4.1.9) nel caso critico e senza termini perturbativi nell'equazione ha soluzioni non negative non banali in aperti cilindrico-annulari del seguente tipo:

$$\{(z,t) \in \mathbb{H}^n \mid r < |z| < R, \ |t| < T\}, \quad r, R, T > 0.$$

Dunque, una "perturbazione" della geometria di Ω può produrre risultati di esistenza nel caso critico, analogamente a quanto dimostrato da Kazdan e Warner nel caso euclideo.

4.2 Il problema critico per il Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^n}$

Il problema di Yamabe per le varietà di Cauchy-Riemann conduce in maniera naturale allo studio di problemi semilineari per il Laplaciano di Kohn del seguente tipo:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u &= u^p \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.1}$$

ove Ω denota un sottoinsieme aperto limitato di $\mathbb{H}^n$ e $1 \leq p \leq 2^* - 1$.
Lo spazio naturale per studiare il problema (4.2.1) è lo spazio di Sobolev-Stein $S_0^1(\Omega)$, ovvero la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|u\|_{S_0^1} = (\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2)^{1/2}$.
Una funzione non-negativa u si dice *soluzione debole* di (4.2.1) se risulta

$$\int_\Omega \nabla_{\mathbb{H}^n} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} h = \int_\Omega u^p h \quad \forall h \in S_0^1(\Omega).$$

La disuguaglianza di immersione assicura che la funzione $u^p h$ è sommabile in Ω per ogni $u, h \in S_0^1(\Omega)$, qualunque sia $p \leq \frac{Q+2}{Q-2}$.
Le soluzioni deboli di (4.2.1) sono i punti critici del funzionale:

$$I : S_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 - \frac{1}{p+1} \int_\Omega u^{p+1}.$$

Utilizzando collaudate tecniche di teoria variazionale dei punti critici, in [24] è stato dimostrato che il problema (4.2.1) ha (almeno) una soluzione positiva se

$$1 < p < \frac{Q+2}{Q-2}$$

Questo risultato è ottimale nel senso seguente. Se $p = \frac{Q+2}{Q-2}$, il problema non ha soluzioni se $\partial\Omega$ e u sono abbastanza regolari e se Ω è δ_λ-stellato rispetto ad un suo punto come osservato nella sezione precedente. Mediante tecniche più sofisticate, introdotte da Brezis e Nirenberg nel caso del Laplaciano classico, Citti ha dimostrato che nel caso critico ($p = \frac{Q+2}{Q-2}$), il problema (4.2.1) "acquista" soluzione se si perturba opportunamente il termine semilineare nell'equazione. Il problema cui facciamo riferimento è il seguente:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u &= u^{2^*-1} + \lambda u \quad \text{in } \Omega \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.2}$$

dove Ω è un dominio regolare limitato di $\mathbb{H}^n$, $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$ con $Q = 2n + 2$ dimensione omogenea di $\mathbb{H}^n$.
Allo studio di questo problema è dedicato il seguito di questa sezione.
Come dimostrato mediante l'identità di Pohozaev, il problema (4.2.2) non ammette soluzioni per $\lambda \leq 0$ in domini δ_λ-stellati.
Osserviamo, inoltre, che la richiesta di positività di u implica che il problema (4.2.2) non ha soluzione per $\lambda \geq \lambda_1$, ove λ_1 denota il più piccolo autovalore di Dirichlet dell'operatore $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$, ovvero:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in S_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}t}.$$

Infatti, grazie alla disuguaglianza di Poincaré per l'integrale di Dirichlet su $\mathbb{H}^n$ risulta che $\lambda_1 > 0$ ed esiste una funzione positiva $\varphi_1 \in S_0^1(\Omega)$ tale che

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n}\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{in } \Omega \\ \varphi_1 = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Allora, se u è soluzione di (4.2.2), segue che

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}t &= -\int_\Omega \varphi_1 \Delta_{\mathbb{H}^n} u \\ &= \int_\Omega u^p \varphi_1 + \lambda \int_\Omega u\varphi_1 \\ &> \lambda \int_\Omega u\varphi_1 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

da cui $\lambda < \lambda_1$.
In virtù delle precedenti considerazioni, si esamina il problema dell'esistenza di soluzioni del problema (4.2.2) al variare del parametro λ nell'intervallo $(0, \lambda_1)$.
Si prova il seguente teorema.

Teorema 4.2.1. *Il problema* (4.2.2) *ammette soluzione per ogni* $\lambda \in (0, \lambda_1)$, *dove* λ_1 *è il primo autovalore di Dirichlet di* $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$.

Alla dimostrazione del teorema premetteremo alcuni lemmi e considerazioni. Osserviamo, intanto, che dal teorema si evince l'assenza di *dimensioni critiche* per il Laplaciano subellittico su $\mathbb{H}^n$. Non ci sono, infatti, dimensioni spaziali, come ad esempio la dimensione $N = 3$ per il Laplaciano euclideo, per le quali il problema in esame non ammetta soluzioni per λ sufficientemente piccoli. Questa differenza di comportamento rispetto all'analogo euclideo è dovuta sostanzialmente al fatto che in questo contesto il ruolo della dimensione spaziale è assunto dalla dimensione omogenea $Q = 2n+2$ di $\mathbb{H}^n$, che è sempre maggiore o uguale a 4. In effetti, dalle stime asintotiche che realizzeremo nel corso della dimostrazione del teorema, risulterà evidente che vi è una perfetta corrispondenza di comportamento ad esempio tra la dimensione omogenea $Q = 4$ nel caso Heisenberg e la dimensione topologica $N = 4$ nel caso euclideo. L'approccio variazionale scelto per trattare il problema, analogamente al caso euclideo, è il seguente. Le soluzioni del problema corrispondono ai punti critici del funzionale

$$f_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 \, - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u^{2^*}, \quad u \in S_0^1(\Omega).$$

Un approccio alternativo è quello di cercare soluzioni non banali come punti critici del funzionale

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2$$

sulla seguente varietà di $S_0^1(\Omega)$:

$$M = \left\{ u \in S_0^1(\Omega) \,\middle|\, \|u\|_{2^*} = 1 \right\}.$$

In particolare, cercheremo punti critici che risultino punti di minimo assoluto di F_λ su M, il che equivale a tentare di minimizzare il rapporto

$$Q_\lambda(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 \, - \lambda u^2)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}t}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*} \mathrm{d}z\mathrm{d}t\right)^{2/2^*}}, \qquad u \in S_0^1(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Denoteremo con S_λ l'estremo inferiore di $F_\lambda(u)$ su M, ovvero

$$S_\lambda = \inf_{u\in M} F_\lambda(u) = \inf_{\substack{u\in S_0^1(\Omega)\\ \|u\|_{2^*}=1}} \{\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2^2 \, - \, \|u\|_2^2\}$$

Si noti che, per $\lambda = 0$, risulta

$$S_0 = \inf_{\substack{u\in S_0^1(\Omega)\\ \|u\|_{2^*}=1}} \{\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2^2\} \, = \, S$$

cioè S_0 corrisponde alla miglior costante di Sobolev S per l'immersione di $S_0^1(\Omega)$ in $L^{2^*}(\Omega)$.
Supponiamo che S_λ sia raggiunto da una funzione $u_0 \in S_0^1(\Omega)$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere $u_0 \geq 0$ in Ω, a meno di sostituire u_0 con $|u_0|$. Poichè u_0 è un punto critico di F_λ su M, esisterà un moltiplicatore di Lagrange $\mu \in \mathbb{R}$ tale che

$$-\Delta_{\mathbb{H}^n} u - \lambda u = \mu u^{2^*-1} \quad \text{in } \Omega.$$

In realtà, $\mu = S_\lambda$, e se $\lambda < \lambda_1$, risulta $S_\lambda > 0$. Dunque, posto $u = S_\lambda^{1/(2^*-2)} u_0$, u è soluzione del nostro problema (4.2.2). Si noti che u è positiva in Ω, grazie al principio del massimo forte per $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ dimostrato da Bony in [1].
Il lemma seguente, dovuto a Lieb nel caso euclideo, riveste un ruolo cardine nella risoluzione del problema. Esso fornisce una condizione sufficiente affinchè S_λ sia raggiunto.

Lemma 4.2.2. *Se $S_\lambda < S$, allora S_λ è raggiunto.*

Dimostrazione. La dimostrazione è l'esatta trasposizione al contesto in esame di quella euclidea, per la quale si veda [7]. □

Possiamo, ora, procedere con la dimostrazione del teorema.

Dimostrazione del Teorema 4.2.1 Supponiamo per semplicità che $0 \in \Omega$. In virtù del lemma precedente, è sufficiente provare che $S_\lambda < S$. A tal fine, stimiamo il quoziente

$$Q_\lambda(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 - \lambda u^2)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}t}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*} \mathrm{d}z\mathrm{d}t\right)^{2/2^*}} \tag{4.2.3}$$

nelle funzioni della forma

$$u_\varepsilon(z,t) = \varphi(z,t) U_\varepsilon(z,t)$$

ove le U_ε sono le soluzioni del problema limite

$$-\Delta_{\mathbb{H}^n} u = u^{2^*-1} \quad \text{su } \mathbb{H}^n$$

ovvero

$$U_\varepsilon(z,t) = \frac{C\varepsilon^{\frac{Q-2}{4}}}{((\varepsilon + |z|^2)^2 + t^2)^{\frac{Q-2}{4}}}, \quad \varepsilon > 0$$

e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ è una fissata funzione di cut-off, $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi \equiv 1$ in un intorno di 0 che supponiamo del tipo $B_d(0,R)$, ove d è la norma omogenea naturale su $\mathbb{H}^n$, ovvero $d(z,t) = (|z|^4 + t^2)^{1/4}$.
Come si può osservare, esiste una stretta relazione tra le funzioni U_ε e la norma d. Infatti, le U_ε lontano dall'origine hanno lo stesso comportamento della funzione d^{2-Q}, ovvero della soluzione fondamentale del Laplaciano subellittico su $\mathbb{H}^n$. Questo fatto ci consente di stimare i termini nella (4.2.3) facendo uso della formula per le coordinate polari su $\mathbb{H}^n$ che qui richiamiamo. Per ogni $0 \le r_1 < r_2$ e per ogni funzione misurabile $f : [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$, si ha

$$\int_{B_d(0,r_2)\setminus B_d(0,r_1)} f(d(\xi))\,\mathrm{d}\xi \;=\; Q\,|B_d(0,1)| \int_{r_1}^{r_2} f(\rho)\,\rho^{Q-1}\,\mathrm{d}\rho$$

se almeno uno dei due integrali esiste.
Utilizzando la formula precedente, si ottengono le seguenti stime per ciascun termine in (4.2.3), per $\varepsilon \to 0^+$:

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u_\varepsilon\|_2^2 = \|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} \;+\; O(\varepsilon^{(Q-2)/2}) \tag{4.2.4}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = \|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} \;+\; O(\varepsilon^{Q/2}) \tag{4.2.5}$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} C\,\varepsilon \;+\; O(\varepsilon^{(Q-2)/2}) & \text{se } Q > 4 \\ C\,\varepsilon|\ln\varepsilon| \;+\; O(\varepsilon) & \text{se } Q = 4 \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Infatti, per quanto riguarda il termine $\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u_\varepsilon\|_2^2$, si ha che

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} U_\varepsilon^{2^*}(z,t)\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2 U_\varepsilon^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t + O(\varepsilon^{Q/2})$$

come dimostrato nella Sezione 2.4.1. Inoltre, valutando il secondo integrale nella precedente, tenuto conto che $\varphi \equiv 1$ sulla sfera $B_R = B_d(0,R)$ e che

$U_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{\frac{2-Q}{4}} U_1(\delta_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}\xi)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2 U_\varepsilon^2 &= \int_{\Omega\setminus B_R} |\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi|^2 U_\varepsilon^2 \le C \int_{\Omega\setminus B_R} U_\varepsilon^2 \\
&= C \int_{d(\xi)>R} \varepsilon^{(2-Q)/2}\, U_1^2(\delta_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= C\varepsilon \int_{d(\xi)>\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{1}{(1+|z|^2)^2+t^2)^{(Q-2)/2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
&\le C\varepsilon \int_{d(\eta)>\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{1}{d(\eta)^{2Q-4}}\,\mathrm{d}\eta \\
&= C\varepsilon \int_{\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{Q-3}}\,\mathrm{d}\rho \\
&= O(\varepsilon^{(Q-2)/2})
\end{aligned}$$

Quindi si ha che:

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u_\varepsilon\|_2^2 = \|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} + O(\varepsilon^{(Q-2)/2}) + O(\varepsilon^{Q/2}) = \|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} + O(\varepsilon^{(Q-2)/2}),$$

come annunciato dalla (4.2.4). Per quanto riguarda la stima (4.2.5), essa è stata dimostrata nella Sezione (2.4.1). Resta, dunque, da verificare la stima per il termine $\|u_\varepsilon\|_2^2$. Valutiamo quindi:

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_2^2 = \int_\Omega \varphi^2 U_\varepsilon^2 &\ge \int_{B_d(0,R)} U_\varepsilon^2(\xi)\mathrm{d}\xi = \varepsilon \int_{B_d(0,\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}})} U_1^2(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \varepsilon\left(\int_{B_d(0,1)} U_1^2 + \int_{B_d(0,\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}})\setminus B_d(0,1)} U_1^2\right) \\
&\ge C\varepsilon\left(1 + \int_1^{\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{1}{\rho^{Q-3}}\,\mathrm{d}\rho\right) \\
&= \begin{cases} C\,\varepsilon + O(\varepsilon^{(Q-2)/2}) & \text{se } Q>4 \\ C\,\varepsilon|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon) & \text{se } Q=4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dunque, sostituendo in $Q_\lambda(u_\varepsilon)$, per $Q>4$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) &\le \frac{\left(\|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} - c\lambda\varepsilon + O(\varepsilon^{(Q-2)/2})\right)}{\left(\|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} + O(\varepsilon^{Q/2})\right)^{2/2^*}} \\
&= S - c\lambda\varepsilon + O(\varepsilon^{(Q-2)/2}) < S,
\end{aligned}$$

per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Analogamente, per $Q = 4$ abbiamo

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &\leq \frac{\Big(\|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} - c\lambda\varepsilon|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon)\Big)}{\Big(\|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} + O(\varepsilon)\Big)^{2/2^*}} \\ &= S - c\lambda\varepsilon|\ln\epsilon| + O(\varepsilon) < S \end{aligned}$$

per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.
Si è, dunque, dimostrato che

$$S_\lambda \leq Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$$

in tutte le dimensioni ammissibili per $\mathbb{H}^n$, da cui la tesi. □

Osservazione 4.2.3. Facciamo notare che se la dimensione omogenea $Q = 3$ fosse ammissibile per il problema, si avrebbe, analogamente al caso euclideo in dimensione $N = 3$, una stima del tipo

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq S + O(\sqrt{\varepsilon}) - C\lambda\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

In questo caso, il "guadagno" dovuto a λ e la "perdita" dovuta al troncamento potrebbero essere dello stesso ordine in ε, costringendo la stima $S_\lambda < S$ a valere soltanto per λ sufficientemente "grandi".

4.3 Il problema critico per l'operatore $\Delta_x + |x|^2\Delta_y$

4.3.1 Alcune premesse

In questa sezione ci occupiamo di un problema critico per l'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^2\Delta_y$, analogo a quello studiato nella precedente sezione per il Laplaciano di Kohn.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^n_y$ un aperto limitato intersecante l'insieme $\{x = 0\}$. Si ricordi che domini di questo tipo hanno dimensione locale omogenea pari alla dimensione omogenea dell'intero spazio $Q = m + 2n$.
Dunque, in virtù del Teorema 1.2.12, l'embedding

$$\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

risulta essere compatto per $p < 2^* = 2Q/(Q-2)$.
D'altra parte l'invarianza rispetto alle dilatazioni δ_λ del rapporto $\frac{\|Xu\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}$ causa la mancanza di compattezza dell'embedding $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.
Quindi per i domini Ω intersecanti l'insieme $\{x = 0\}$ il problema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u &= u^{2^*-1} + \lambda u \quad \text{in } \Omega \\ u &> 0 \qquad\qquad\quad\ \ \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\quad\ \ \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.1}$$

risulta essere "critico" nel senso usuale delle immersioni di Sobolev.
Nel seguito affronteremo il problema dell'esistenza di soluzioni del problema (4.3.1) in dimensioni basse, ove sono noti gli estremali della disuguaglianza di Sobolev associata ad $\mathcal{L}$ (si vedano i risultati di [1], da noi richiamati nei Teoremi 3.3.1 e 3.3.2), ed avremo modo di rilevare la "criticità" della dimensione omogenea $Q = 3$.
Cominciamo, intanto, col premettere una identità di tipo-Pohozaev per le soluzioni del problema di Dirichlet semilineare associato ad $\mathcal{L}$, che interverrà nella trattazione del problema (4.3.1).
Analogamente al caso Heisenberg, l'omogeneità dell'operatore rispetto al gruppo di dilatazioni

$$\delta_\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda^2 y), \quad \lambda > 0$$

suggerisce di calcolare identità di Pohozaev utilizzando il campo vettoriale generatore delle suddette dilatazioni, ovvero

$$Z = \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n 2y_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Nel seguito, denoteremo spesso con $z = (x,y)$ la variabile complessiva in $\mathbb{R}^N$.
La classica identità di Pohozaev si riscrive in questo contesto come segue:

Teorema 4.3.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato, C^1 a tratti e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ soluzione del problema*

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u &= f(u) \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua t.c. $f(0) = 0$, con primitiva $F(u) = \int_0^u f(\nu)\mathrm{d}\nu$.
Allora, u soddisfa l'identità:

$$\int_{\partial\Omega} |Xu|^2 < Z, N > \mathrm{d}H_{N-1} = \int_\Omega \big[2QF(u) - (Q-2)u\, f(u)\big]\mathrm{d}z \tag{4.3.2}$$

ove Z è il campo vettoriale generatore delle dilatazioni δ_λ sopra definito, N è la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$ e $\mathrm{d}H_{N-1}$ denota la misura di Hausdorff $(N-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^N$.

La dimostrazione si deduce facilmente dalla seguente identità integrale, per la cui dimostrazione vedasi [23, Teor.2.2].

Lemma 4.3.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato, C^1 a tratti e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Allora*

$$2\int_{\partial\Omega} < A\nabla u, N > \; Zu \, \mathrm{d}H_{N-1} - \int_{\partial\Omega} |Xu|^2 < Z, N > \mathrm{d}H_{N-1}$$
$$= (2-Q)\int_\Omega |Xu|^2 \mathrm{d}z + 2\int_\Omega Zu\,\mathcal{L}u\,\mathrm{d}z$$

ove A è la matrice definita in (1.2.1) per cui risulta $\mathcal{L} = \mathrm{div}(A\nabla u)$.

Dimostrazione del Teorema 4.3.1 Tenendo conto del fatto che $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$ e quindi $\nabla u = -N\,|\nabla u|$, si ha:

$$\int_{\partial\Omega} < A\nabla u, N > \; Zu \, \mathrm{d}H_{N-1} = \int_{\partial\Omega} < A\nabla u, N >< Z, \nabla u > \mathrm{d}H_{N-1}$$
$$= \int_{\partial\Omega} < A\nabla u, \nabla u >< Z, N > \mathrm{d}H_{N-1} = \int_{\partial\Omega} |Xu|^2 < Z, N > \mathrm{d}H_{N-1} \tag{4.3.3}$$

Inoltre, essendo u soluzione di $-\mathcal{L}u = f(u)$, valgono le seguenti:

$$\int_\Omega |Xu|^2 = -\int_\Omega u\mathcal{L}u = \int_\Omega uf(u)\,; \tag{4.3.4}$$

$$\int_\Omega Zu\mathcal{L}u = -\int_\Omega Zuf(u) = -\int_\Omega Z(F(u))$$
$$= -\int_{\partial\Omega} F(u)Z\cdot N\mathrm{d}H_{N-1} + \int_\Omega \mathrm{div}Z\,F(u) \tag{4.3.5}$$
$$= Q\int_\Omega F(u)\,,$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è usato il fatto che $\mathrm{div}Z = Q$, mentre il primo dei due integrali risulta nullo, essendo $u = 0$ su $\partial\Omega$ e $F(0) = 0$. Infine, sostituendo le (4.3.3), (4.3.4) e (4.3.5) nell'identità del lemma precedente, si ottiene la tesi. □

Ora, in maniera perfettamente analoga a quanto visto per il caso Heisenberg, introduciamo gli insiemi stellati rispetto alle dilatazioni δ_λ.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, C^1 a tratti, $0 \in \Omega$. L'insieme Ω si dirà δ_λ-stellato rispetto all'origine se, denotata con N la normale unitaria esterna alla frontiera di Ω, si ha che

$$Z \cdot N \geq 0$$

in ogni punto regolare di $\partial\Omega$.

Dal Teorema 4.3.1 segue, analogamente al caso Heisenberg, che il problema (4.3.1) non ammette soluzioni non banali su domini δ_λ-strettamente stellati per $\lambda \leq 0$. Inoltre, la richiesta di soluzioni positive impone che sia $\lambda < \lambda_1$. Confineremo, dunque, la nostra analisi all'intervallo dei λ compresi tra 0 e λ_1.

4.3.2 Criticità della dimensione omogenea $Q = 3$

Questa sezione è dedicata allo studio del problema critico (4.3.1) per l'operatore $\mathcal{L} = \Delta_x + |x|^2\Delta_y$ in dimensioni basse. Si prova, in particolare, che la dimensione omogenea $Q = 3$ è critica per il problema in esame e costituisce, dunque, l'analogo della dimensione $N = 3$ per il Laplaciano euclideo.

Sia Ω un dominio limitato regolare in $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^n_y$, $0 \in \Omega$, e si consideri il problema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u &= u^{2^*-1} + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u &> 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.6}$$

dove $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$ e $Q = m + 2n$.

Il nostro risultato è il seguente:

Teorema 4.3.3. *Sia Ω un aperto limitato regolare, $0 \in \Omega$. Allora*

(i) Se $Q = 4$ ($m = 2, n = 1$), il problema (4.3.6) ammette almeno una soluzione $u \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ per $0 < \lambda < \lambda_1$.

(ii) Se $Q = 3$ ($m = n = 1$), il problema (4.3.6) ammette almeno una soluzione $u \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ per $\lambda_* < \lambda < \lambda_1$, dove

$$\lambda_* = \inf_{\varphi \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega \frac{|X\varphi(x,y)|^2}{d(x,\, y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_\Omega \frac{\varphi^2(x,y)}{d(x,\, y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

ove $d(x,y) = (|x|^4 + 4|y|^2)^{1/4}$ *denota la norma omogenea naturale associata ad* $\mathcal{L}$.

(iii) *Se* $Q = 3$ *e* Ω *è un aperto limitato* δ_λ-strettamente stellato *rispetto all'origine, e se il problema* (4.3.6) *ammette soluzione, allora*

$$\lambda \geq \lambda_0(\Omega) > 0.$$

Dimostrazione della(i) Sia $Q = 3, 4$. Ragionando come in [7], dal lemma di Lieb deduciamo che una condizione sufficiente per l'esistenza di una soluzione di (4.3.6) per $0 < \lambda < \lambda_1$ è l'esistenza di una funzione $u \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ tale che

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|Xu\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} < S.$$

A questo scopo, stimiamo $Q_\lambda(u)$ nelle funzioni della forma

$$u_\varepsilon(x,y) = \varphi(x,y)U_\varepsilon(x,y)$$

dove U_ε è una funzione estremale per la disuguaglianza di Sobolev, ovvero

$$U_\varepsilon(x,y) = \frac{C_\varepsilon}{((\varepsilon + |x|^2)^2 + 4|y|^2)^{\frac{Q-2}{4}}}, \quad C_\varepsilon = C\varepsilon^{\frac{Q-2}{4}}, \quad \varepsilon > 0$$

che risulti, per C opportuna, soluzione del problema limite $-\mathcal{L}U = U^{2^*-1}$ in $\mathbb{R}^N$, e φ è una opportuna funzione di cut-off per Ω, i.e.

$$\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \mid 0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi = 1 \text{ in un intorno di } 0\}.$$

Ora, posto $\tilde{U}_\varepsilon = \frac{U_\varepsilon}{C_\varepsilon}$, un'attenta stima per $\varepsilon \to 0$ conduce alla seguente espansione asintotica:

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + C_\varepsilon^2 \int_\Omega (|X\varphi|^2 - \lambda\varphi^2)\tilde{U}_\varepsilon^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sigma(\varepsilon,\varphi) \qquad (4.3.7)$$

dove $\sigma(\varepsilon,\varphi) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$, per ogni fissata funzione regolare φ; inoltre, per $\varphi = const$ in un intorno di 0, risulta $\sigma = o(C_\varepsilon^2)$.
Infatti, stimando ciascun termine in $Q_\lambda(u_\varepsilon)$, analogamente a quanto visto per

il caso Heisenberg, risulta:

$$\begin{aligned}
\|Xu_\varepsilon\|_2^2 &= \int_\Omega \varphi^2 |XU_\varepsilon|^2 + 2\int_\Omega \varphi U_\varepsilon X\varphi XU_\varepsilon + \int_\Omega U_\varepsilon^2 |X\varphi|^2 \\
&= -\int_\Omega \varphi^2 U_\varepsilon \mathcal{L} U_\varepsilon + \int_\Omega U_\varepsilon^2 |X\varphi|^2 \\
&= +\int_\Omega \varphi^2 U_\varepsilon^{2^*} + \int_\Omega U_\varepsilon^2 |X\varphi|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} {U_\varepsilon}^{2^*} + \int_\Omega {U_\varepsilon}^2\, |X\varphi|^2 + \alpha(\varphi,\varepsilon)
\end{aligned}$$

dove

$$\alpha(\varphi,\varepsilon) = -\int_{\Omega^C} {U_\varepsilon}^{2^*} + \int_\Omega (\varphi^2 - 1)\, {U_\varepsilon}^{2^*}.$$

e

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 &= (\int_\Omega |U_\varepsilon|^{2^*} + \int_\Omega (\varphi^{2^*} - 1)\, {U_\varepsilon}^{2^*})^{2/2^*} \\
&= (\int_{\mathbb{R}^N} |U_\varepsilon|^{2^*} + \beta(\varphi,\varepsilon))^{2/2^*}
\end{aligned}$$

dove

$$\beta(\varphi,\varepsilon) = -\int_{\Omega^C} {U_\varepsilon}^{2^*} + \int_\Omega (\varphi^{2^*} - 1)\, {U_\varepsilon}^{2^*}$$

da cui

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} {U_\varepsilon}^{2^*} \,+\, C_\varepsilon^2 \int_\Omega (|X\varphi|^2 - \lambda\varphi^2)\tilde{U}_\varepsilon^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \,+ \alpha(\varepsilon,\varphi)}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} U_\varepsilon^{2^*} + \beta(\varphi,\varepsilon)\right)^{2/2^*}} \tag{4.3.8}$$

Ora, ricordando che

$$S = \frac{\displaystyle\int |XU_\varepsilon|^2}{\left(\displaystyle\int U_\varepsilon^{2^*}\right)^{2/2^*}} = \frac{\displaystyle\int U_\varepsilon^{2^*}}{\left(\displaystyle\int U_\varepsilon^{2^*}\right)^{2/2^*}},$$

dalla (4.3.8) segue che $Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$ per $\varepsilon \to 0$, se entrambe le seguenti condizioni si verificano, per $\varepsilon \to 0$:

(a) $C_\varepsilon^2 \int_\Omega (|X\varphi|^2 - \lambda\varphi^2)\tilde{U}_\varepsilon^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 0;$

(b) $\alpha(\varepsilon,\varphi), \beta(\varepsilon,\varphi) = o\left(C_\varepsilon^2 \int_\Omega (|X\varphi|^2 - \lambda\varphi^2)\tilde{U}_\varepsilon^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$

Ora, se $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, si verifica direttamente che $\alpha(\varepsilon,\varphi), \beta(\varepsilon,\varphi) = O(\varepsilon^{Q/2})$, da cui la (b), ricordando che $C_\varepsilon^2 = C\varepsilon^{(Q-2)/2}$, e quindi la (4.3.7). Infatti, essendo $\varphi = 1$ in un intorno di $0 \in \Omega$, risulta

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int (1-\varphi^2)U_\varepsilon^{2^*} \leq \int_{d(z)>R} U_\varepsilon^{2^*}\mathrm{d}z = \int_{d(z)>\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}} U_1^{2^*}\mathrm{d}z \\ &\leq C \int_{d(z)>\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{1}{d(z)^{2Q}}\,\mathrm{d}z = C\int_{\frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty} \frac{\rho^{Q-1}}{\rho^{2Q}}\,\mathrm{d}\rho \\ &= O(\varepsilon^{Q/2}) \end{aligned}$$

e analogamente si stimano gli altri termini in $\alpha(\varepsilon,\varphi)$ e $\beta(\varepsilon,\varphi)$.
Per quanto riguarda la (a), osserviamo che essa è soddisfatta per ogni $\lambda > 0$ se (e solo se) $\tilde{U}_\varepsilon$ tende, per $\varepsilon \to 0$, ad una funzione il cui quadrato non è sommabile intorno a 0. Ma poichè

$$\tilde{U}_\varepsilon(z) \to \Gamma(z) = \frac{C}{d(z)^{Q-2}},$$

e Γ non è L^2-sommabile in 0 per $Q \geq 4$, allora la (a) è verificata per $Q \geq 4$ e, quindi, risulta dimostrata la tesi (i).

Dimostrazione della (ii).

Si premette il seguente lemma:

Lemma 4.3.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato, $0 \in \Omega$. Definiamo:*

$$\lambda_* = \inf_{\varphi \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}_X^1(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega \frac{|X\varphi(z)|^2}{d(z)^2}\,\mathrm{d}z}{\displaystyle\int_\Omega \frac{\varphi^2(z)}{d(z)^2}\,\mathrm{d}z} \tag{4.3.9}$$

Allora λ_* è raggiunto da una funzione positiva $\overline{\varphi} \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}_X^1(\Omega)$, e risulta $0 < \lambda_* < \lambda_1$, dove λ_1 è il più piccolo autovalore di $-\mathcal{L}$.

Dimostrazione. L'esistenza di un minimo $\overline{\varphi}$ in (4.3.9), così come la positività di $\overline{\varphi}$ e la stima $\lambda_* > 0$ si possono ottenere mediante argomenti standard di minimizzazione in spazi di Sobolev con peso. Ne omettiamo qui i dettagli. Facciamo, invece, vedere che $\lambda_* < \lambda_1$.

Denotata con $u_1 \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$ una autofunzione (positiva) relativa a λ_1, i.e. $-\mathcal{L}u_1 = \lambda_1 u_1$, e posto $\varphi(z) = d(z)u_1(z)$, risulta per calcolo diretto:

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega \frac{|X\varphi(z)|^2}{d(z)^2}\,\mathrm{d}z}{\displaystyle\int_\Omega \frac{\varphi^2(z)}{d(z)^2}\,\mathrm{d}z} = \lambda_1$$

da cui $\lambda_* \le \lambda_1$.
D'altra parte, osserviamo che $z = 0$ è un minimo interno (assoluto) per φ, il che rende φ non compatibile con il ruolo di minimizzante nella (4.3.9). Dunque, $\lambda_* < \lambda_1$. □

Proviamo, ora, la (ii).
Per $Q = 3$, la funzione $\Gamma(z) = \dfrac{C}{d(z)^{Q-2}}$ è L^2-sommabile in 0 e quindi, per $\varepsilon \to 0$, risulta

$$\int_\Omega (|X\varphi(z)|^2 - \lambda\varphi^2(z))\tilde{U}^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z \longrightarrow \int_\Omega (|X\varphi(z)|^2 - \lambda\varphi^2(z))d(z)^{-2/(Q-2)}\mathrm{d}z \tag{4.3.10}$$

ove il secondo integrale è ovviamente *positivo* se λ è sufficientemente piccolo; quindi non esiste alcuna possibilità di ottenere la (a) per valori piccoli di λ.
D'altra parte, se $\lambda > \lambda_*$, allora dal lemma precedente e da teoremi di densità standard, si deduce che esiste $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ che rende il secondo integrale in (4.3.10) *negativo*, per cui la (a) è soddisfatta, insieme alla (b), essendo $\varphi \equiv$ *cost* in un intorno di 0; dunque la (ii) è soddisfatta.

Dimostrazione della (iii). Si adatterà la dimostrazione del Teorema 1.2" in [7]. Per ipotesi, Ω è un aperto regolare di $\mathbb{R}^2$ (Q=3), δ_λ-strettamente stellato rispetto ad un punto dell'asse $x = 0$ che supponiamo per semplicità essere l'origine. Stiamo, dunque, considerando il problema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u &= u^5 + \lambda u \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ 0 \in \Omega \\ \quad u &> 0 \quad\quad\quad\ \ \text{in } \Omega \\ \quad u &= 0 \quad\quad\quad\ \ \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.11}$$

per $0 < \lambda < \lambda_1$. Dall'identità di Pohozaev (4.3.2) nel caso particolare $f(u) = u^{2^*-1} + \lambda u$ si ricava che, se u è una soluzione sufficientemente regolare del problema (4.3.11), allora:

$$
\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega u^2 &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} < A\nabla u, \nabla u >< Z, N > \mathrm{d}\sigma \\
&\geq a \int_{\partial\Omega} < A\nabla u, \nabla u > \mathrm{d}\sigma = a \int_{\partial\Omega} \frac{(< A\nabla u, N >)^2}{< AN, N >} \mathrm{d}\sigma \\
&\geq b \int_{\partial\Omega} (< A\nabla u, N >)^2 \mathrm{d}\sigma \geq c \left(\int_{\partial\Omega} < A\nabla u, N > \mathrm{d}\sigma \right)^2 \\
&= c \left(\int_\Omega \mathrm{div}(A\nabla u) \right)^2 = c \left(\int_\Omega \mathcal{L}u \right)^2 \\
&= c \left(\int_\Omega |\mathcal{L}u| \right)^2 \\
&\geq d \int_\Omega u^2
\end{aligned}
$$

ove a, b, c, d sono costanti positive, da cui la tesi.
Giustifichiamo alcuni dei precedenti passaggi. Nella prima disuguaglianza si è usata la stretta stellatezza di Ω limitato. Poi, tenuto conto che su $\partial\Omega$ risulta $\nabla u = -N|\nabla u|$, si è usata l'uguaglianza $< A\nabla u, \nabla u >= \dfrac{(< A\nabla u, N >)^2}{< AN, N >}$ su $\partial\Omega$, ove $< AN, N >\neq 0$ poichè $0 \notin \partial\Omega$ e $< AN, N >\leq C$ essendo Ω limitato. Infine nell'ultima disuguaglianza, posto $\mathcal{L}u = f$ si è usata una stima della norma L^2 di u in termini della norma L^1 di f, valida in dimensione omogenea $Q = 3$. Ricaviamo qui di seguito questa stima, utilizzando la rappresentazione delle soluzioni di Lax-Milgram del problema $\mathcal{L}u = f$ in termini di funzioni di Green approssimate. Come visto nel Capitolo 1, Prop. 1.2.24, se u è la soluzione di $\mathcal{L}u = f$ in $\overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)$, allora risulta

$$
u_\rho(\xi) := \fint_{B_\rho(\xi)} u = \int_\Omega G^\rho(\xi, z) f(z) \mathrm{d}z
$$

ove $G^\rho_\xi = G^\rho(\xi, \cdot)$ è la funzione di Green ρ-approssimata di Ω con polo in ξ. La validità di stime L^q uniformi rispetto al polo ξ per la funzione G^ρ_ξ, i.e.

$$
\sup_{\xi\in\Omega} \|G^\rho(\xi, \cdot)\|_q \leq C, \qquad q < \frac{Q}{Q-2} \tag{4.3.12}
$$

consente di studiare le proprietà di integrabilità di u_ρ, adattando la dimostrazione del teorema di Young sulla convoluzione in $\mathbb{R}^N$.
Si prova, infatti, che se $f \in Ł^p$, $p \geq 1$, posto:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

risulta che $u_\rho \in L^r(\Omega)$ e $\|u_\rho\|_r \leq C\|f\|_p$.
Scrivendo, infatti, per $f \in L^p$

$$G^\rho(\xi, z)|f(z)| = \left[G^\rho(\xi, z)^q |f(z)|^p\right]^{1/r} |f(z)|^{p((1-1/q)} G^\rho(\xi, z)^{q(1-1/p)}$$

dalla disuguaglianza di Hölder generalizzata si ottiene

$$|u_\rho(\xi)| \leq \left(\int_\Omega G^\rho(\xi, z)^q |f(z)|^p \mathrm{d}z\right)^{1/r} \left(\int_\Omega G^\rho(\xi, z)^q \mathrm{d}z\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |f(z)|^p \mathrm{d}z\right)^{1/q'}$$

ed integrando questa disuguaglianza

$$\left(\int_\Omega |u_\rho(\xi)|^r \mathrm{d}\xi\right)^{1/r} \leq \sup_{\xi \in \Omega} \|G^\rho(\xi, \cdot)\|_q \left(\int_\Omega |f(z)|^p \mathrm{d}z\right)^{1/p}$$

da cui, tenendo conto che la stima (4.3.12) da noi dimostrata in (1.2.17) è uniforme in ρ, e che $u_\rho \to u$ q.o. in Ω, si ha per convergenza dominata la stima per u, i.e.

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dunque, tornando alla nostra dimostrazione, nel caso $p = 1$ si ha che $u \in L^r$ per $r < \frac{Q}{Q-2}$, e quindi in dimensione $Q = 3$ si ritrova la stima

$$\|u\|_2 \leq C\|f\|_1$$

sopra utilizzata. □

Osservazione 4.3.5. Data l'invarianza dell'operatore $\mathcal{L}$ rispetto alle traslazioni euclidee nella variabile y, il precedente teorema vale per ogni aperto limitato Ω intersecante la varietà $\{x = 0\}$.

Osservazione 4.3.6. Poichè le concentrazioni delle u_ε si possono realizzare intorno ad ogni punto dell'asse $\{x = 0\}$, l'intervallo dei λ per cui il problema ammette soluzioni in dimensione $Q = 3$ individuato nel punto (ii) si può ulteriormente estendere a sinistra considerando l'estremo

$$\lambda_* = \inf_{z_0 \in \Omega \cap \{x=0\}} \lambda_*(z_0)$$

dove

$$\lambda_*(z_0) = \lambda_*(0, y_0) = \inf_{\varphi \in \overset{o}{\mathcal{D}}{}^1_X(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega \frac{|X\varphi(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{d(x,\, y-y_0)^2}}{\displaystyle\int_\Omega \frac{\varphi^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{d(x,\, y-y_0)^2}}$$

per ogni punto $z_0 = (0, y_0) \in \Omega \cap \{x = 0\}$.

Riepilogando, abbiamo dimostrato che, se Ω è un aperto limitato regolare di $\mathbb{R}^2$, strettamente δ_λ stellato rispetto all'origine, esistono due numeri positivi λ_0 e λ_* in $(0, \lambda_1)$ tali che

(i) $\forall\, \lambda \in [\,0, \lambda_0\,]$ il problema (4.3.1) non ammette soluzioni;

(ii) $\forall\, \lambda \in (\lambda_*, \lambda_1)$ il problema (4.3.1) ammette soluzioni.

Resta aperto il problema di determinare una classe di domini, come le sfere per il Laplaciano, sui quali il problema si possa descrivere completamente, risultando $\lambda_0 = \lambda_*$.

Bibliografia

[1] W. Beckner, *On the Grushin operator and hyperbolic symmetry*, Proceedings of the A. M. S. Vol. **129**, No 4, 1233-1246.

[2] Besov, Il'in, Nikol'skii, Integral representations of functions and imbedding theorems, Ed. by Mitchell H. Taiblessons, Translation from the Russian, Scripta Series in Mathematics (1978).

[3] G. Bianchi, H. Egnell, *A note on the Sobolev Inequality*, Journal of Functional Analysis **100** (1991), 18-24.

[4] A. Bonfiglioli, F. Uguzzoni, *A note on lifting of Carnot groups*, in corso di stampa su Revista Mat. Iberoamericana.

[5] J. M. Bony, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier Grenobles **19**, No.1 (1969), 277-304.

[6] H. Brezis, E. Lieb, *Sobolev inequalities with remainder terms*, J. Funct. Anal. **62** (1985), 73-86.

[7] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[8] C. Cancelier, C.J. Xu, *Remarques sur les fonctions de Green associées aux opérateurs de Hormander*, C.R.Acad. Sci. Paris, **330**, Série I, (2000), 433-436.

[9] S. Chanillo, R. Wheeden, *Existence and estimates of Green's function for degenerate elliptic equations*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1988), 309-340.

[10] J.Y. Chemin, C.J. Xu, *Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques*, Ann. Scient, Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **30**, (1997), 719-751.

[11] K.S. Chou, D. Geng, *On the absence of critical dimensions for the subelliptic Laplacian on the Heisenberg group*, Berrick, A.J. (ed) et al., Proceedings of the Pacific Rim geometry conference, National University of Singapore, Republic of Singapore, December 12-17, 1994. NY: Walter de Gruyter (1997), 69-76.

[12] G. Citti, *Semilinear Dirichlet problem involving critical exponent for the Kohn Laplacian*, Ann. Mat. Pura Appl. **169** (1995), 375-392.

[13] D.E. Edmunds, D. Fortunato, E. Jannelli, *Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator*, Arch. Rational Mech. Anal. **112** (1990), 269-289.

[14] H. Egnell, F. Pacella, M. Tricarico, *Some remarks on Sobolev inequalities*, Nonlin. Anal. T.M.A. **13** (6) (1989), 671-681.

[15] E. Fabes, D. Jerison, C. Kenig, *The Wiener test for degenerate elliptic equations*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **32**, 3 (1982), 151-182.

[16] G.B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat. **13** (1975), 161-207.

[17] G.B. Folland, *The tangential Cauchy-Riemann complex on spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 83-133.

[18] G.B. Folland, E. Stein, Hardy spaces on homogeneous groups, Princeton, NJ, 1982.

[19] B. Franchi, E. Lanconelli, *Une metrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Proceedings of the meeting Linear partial and pseudodifferential operators, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino (1982), 105-114.

[20] B. Franchi, E. Lanconelli, *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa, Cl. Sci. (A) **10** (1983), 523-541.

[21] B. Franchi, E. Lanconelli, *An embedding theorem for Sobolev Spaces related to non-smooth vector fields and Harnack inequality*, Comm. in partial differential equations **9**, (1984) 1237-1264.

[22] L. Gallardo, *Capacités, mouvement Brownien et problème de l'Épine de Lebesgue sur les groupes de Lie nilpotents*, Proc. VII Oberwolfach Conference on Probability measures on groups, Lectures Notes in Math., 1981.

[23] N. Garofalo, *Unique continuation for a class of elliptic operators which degenerate on a manifold of arbitrary codimension*, Journal of Diff. Eq. **104**, (1993), 117-146.

[24] N. Garofalo, E. Lanconelli, *Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group*, Indiana University Math. Journal, Vol. **41**, No. 1 (1992), 71-98.

[25] N. Garofalo, D.M. Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Caratheodory Spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. **XLIX**, (1996), 1081-1144.

[26] N. Garofalo, D. Vassilev, *Symmetry properties of positive entire solutions of Yamabe-type equations on groups of Heisenberg type*, Duke Math. Journal, Vol. **106**, No. 3, (2001), 411-448.

[27] N. Garofalo, D. Vassilev, *Regularity near the characteristic set in the non-linear Dirichlet problem and conformal geometry of sub-Laplacians on Carnot groups*, Math. Ann. **318**, (2000), 453-516.

[28] F. Gazzola, H.Ch. Grunau, *Critical dimensions and higher order Sobolev inequalities with remainder terms*, NoDEA **8** (2001), 35-44.

[29] M. Grüter, K. Widman, *The Green function for uniformly elliptic equations*, Manuscripta Math. **37**, (1982), 303-342.

[30] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.

[31] E. Jannelli, *The role played by space dimension in elliptic critical problems*, J. Diff. Eq. **156** (2000), 407-426.

[32] E. Jannelli, M. Lazzo, *Fundamental solutions and nonlinear elliptic critical problems*, Ann. Univ. Ferrara, Nuova Ser., Sez. VII **45**, Suppl. (1999), 155-171.

[33] D. Jerison, J. Lee, *The Yamabe problem on CR manifolds*, J. Differential Geometry **25** (1987), 167-197.

[34] D. Jerison, J. Lee, *Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg Group and the CR Yamabe problem*, Journal of the A. M. S., vol. **1** No. 1, (1988), 1-13.

[35] A. Kufner et alt., Function Spaces, Nordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[36] E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Asymptotic behaviour and non-existence theorems for semilinear Dirichlet problems involving critical exponents on unbounded domains of the Heisenberg group*, Boll. Unione Mat. Ital. **8** 1-B (1998), 139-168.

[37] E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Non-existence results for semilinear Kohn-Laplace equations in unbounded domains*, Comm. Part. Diff. Equations, **25** No. 9, (2000), 1703-1739.

[38] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations: the limiting case (Parts I and II)*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145-201, 45-121.

[39] W. Littman, G. Stampacchia, H. Weinberger, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, S. 3, vol. **17** (1963), 45-79.

[40] A. Loiudice, *Sobolev inequalities with remainder terms for Sublaplacians and other subelliptic operators*, Dip. di Matematica - Università degli Studi di Bari, Rapporto n. 26/2003.

[41] A. Loiudice, *A note on Sobolev inequality on the Heisenberg group*, in preparazione.

[42] G. Lu, *Existence and size estimates for the Green's functions of differential operators constructed from degenerate vector fields*, Comm. in P.D.E. **17**, (1992), 1213-1251.

[43] G. Lu, J. Wei, *On a Sobolev inequality with remainder terms*, Proceedings of the A.M.S. **128**, No. 1, (1999), 75-84.

[44] A. Malchiodi, F. Uguzzoni, *A perturbation result for the Webster scalar curvature problem on the CR sphere*, J. Math. Pures Appl. **81** (2002), 983-997.

[45] R. O'Neil *Convolution operators and $L(p, q)$ spaces*, Duke Math. J. **30** (1963), 129-142.

[46] P. Pucci, J. Serrin *Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic operators*, J. Math. Pures et Appl. **7** (1990), 55-83.

[47] O. Salinas, *Harnack inequality and Green function for a certain class of degenerate elliptic differential operators*, Revista Mat. Iberoamericana, vol. **7**, No. 3 (1991), 313-349.

[48] E.M. Stein, Harmonic analysis: real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1993.