Variabili aleatorie

Lo spazio dei campioni Ω, in generale, non è un insieme numerico: ad esempio, nel caso del lancio di una moneta, $\Omega = \{T, C\}$ è costituito da oggetti quali Testa o Croce. D'altra parte nelle applicazioni statistiche gli aspetti più rilevanti sono legati ai valori numerici che si ottengono nelle misure. Da ciò la necessità di introdurre delle leggi che associno ai risultati $\omega \in \Omega$ dei nostri esperimenti aleatori dei numeri. Tali leggi si dicono *variabili aleatorie*. La definizione rigorosa è la seguente

Def. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, *si dice* **variabile aleatoria** *una funzione* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tale che tutti gli insiemi del tipo*

$$\{X \in J\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in J\}$$

con J *intervallo arbitrario di* $\mathbb{R}$, *siano elementi di* $\mathcal{A}$.
In altre parole, una v.a. è semplicemente una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ per la quale siamo in grado di calcolare la probabilità che il valore di X cada in un certo intervallo J di $\mathbb{R}$.

Variabili aleatorie discrete

Def. Dato $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *uno spazio di probabilità, una variabile aleatoria* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *si dice discreta se può assumere un insieme finito o infinito numerabile di valori* $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$.

Esempio 1.
Sia Ω lo spazio degli eventi del lancio di due dadi, sia X la funzione che ad ogni possibile esito $(i, j) \in \Omega$ del nostro esperimento associa la somma $i + j$ dei valori ottenuti

$$X(i, j) = i + j, \quad i, j = 1, \ldots 6$$

L'insieme dei possibili valori assunti da X è l'insieme dei numeri interi compresi tra 2 e 12

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$$

dunque X è una v.a. discreta.

Sia X una v.a. discreta che assume i valori $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Ai valori x_i è possibile associare la probabilità con cui essi vengono assunti da X, ovvero i numeri

$$p_i = p(X = x_i) = p\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\} \quad i = 1, 2, \dots k$$

I valori p_i sono numeri compresi tra 0 e 1 e soddisfano la condizione

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

L'insieme dei valori di probabilità p_i prende il nome di *distribuzione di probabilità di* X. I valori p_i si dicono anche *"masse di probabilità"* relative ad X.

Nel caso dell'esempio 1, ovvero nel caso X sia la somma dei punteggi ottenuti nel lancio di due dadi, ai possibili valori assunti $\{2, 3, \dots, 12\}$ corrispondono i seguenti valori di probabilità p_i

$$p_1 = p(X = 2) = p\{(1, 1)\} = \frac{1}{36}$$
$$p_2 = p(X = 3) = p\{(1, 2); (2, 1)\} = \frac{2}{36}$$
$$p_3 = p(X = 4) = P\{(1, 3); (3, 1); (2; 2)\} = \frac{3}{36} \text{ etc. etc.}$$

Possiamo riassumere le informazioni su X nella seguente tabella, ove riportiamo i valori x_i assunti da X e le rispettive p_i

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La funzione di distribuzione di una variabile aleatoria

In alcuni problemi si rende necessario calcolare la probabilità che una v.a. X assuma valori non superiori ad una dato numero. Ad esempio, potremmo chiederci con quale probabilità una v.a. X assume valori minori o uguali di 5, in simboli $p(X \leq 5)$.
A tal fine si introduce la seguente definizione:

Def. Data una v.a. X, si dice **funzione di distribuzione** *(o* **funzione di ripartizione***) associata ad X la funzione $F(x)$ che ad ogni numero reale x associa la probabilità che X assuma valori non superiori ad x, ovvero*

$$F : \mathbb{R} \to [0,1] \quad t.c.\ F(x) = p(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Mediante F possiamo esprimere la probabilità che i valori di X cadano in un generico intervallo $[a, b]$ come segue

$$p(a < X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = F(b) - F(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Se X è una v.a. discreta che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_k$, la funzione di distribuzione $F(x)$ in un punto x_i vale

$$\begin{aligned} F(x_i) =& p(X \leq x_i) = p(X = x_1) + p(X = x_2) + \ldots + p(X = x_i) \\ =& p_1 + p_2 + \ldots + p_i = \sum_{k=1}^{i} p_k \end{aligned}$$

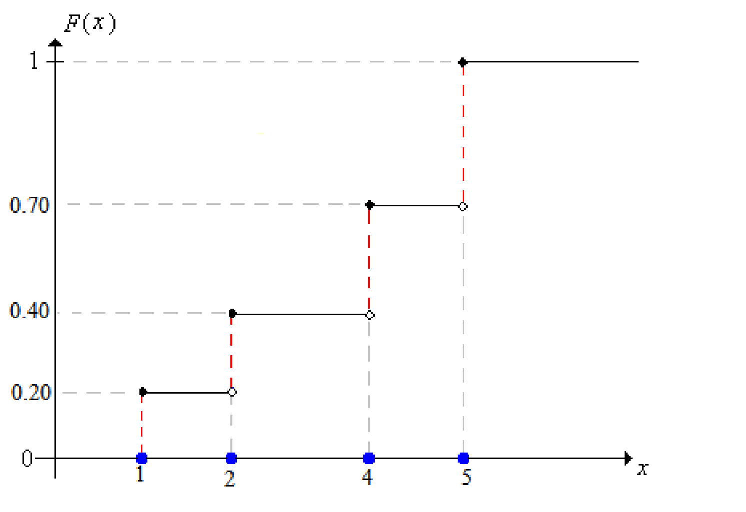
In un generico $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ assume i valori

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < x_1, \\ p_1 & \text{per } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{per } x_2 \leq x < x_3, \\ \ldots & \\ \ldots & \\ 1 & \text{per } x \geq x_k. \end{cases}$$

La funzione $F(x)$ è, dunque, non decrescente, assume valori compresi tra 0 e 1, ha un grafico *a gradini* e presenta delle discontinuità di salto in corrispondenza dei valori x_i, ove l'ampiezza del salto è pari al valore di probabilità p_i.

Esempio. Grafico della funzione di distribuzione $F(x)$ di una variabile aleatoria discreta X che assume i valori $1, 2, 4, 5$ con probabilità:

X	1	2	4	5
p	0.20	0.20	0.30	0.30



Esercizio

In un esperimento aleatorio si lanciano 2 monete e si attribuisce punteggio 1 se esce $\{$Testa, Croce$\}$ o $\{$Croce, Testa$\}$, punteggio 2 se esce due volte Testa, punteggio 3 se esce due volte Croce. Sia X la v.a. che rappresenta il punteggio ottenuto. Si completi la seguente tabella e si disegni il grafico di $F(x)$.

X	1	2	3
p			
F(x)			

Valori di sintesi di una variabile aleatoria: valore atteso, varianza, scarto quadratico medio

Conoscere la distribuzione di probabilità di una v.a. X consente di individuarne tutte le caratteristiche e darne una descrizione completa. Esistono tuttavia degli indici numerici che consentono di sintetizzare alcuni aspetti importanti di una v.a., ad esempio il comportamento "in media" di X e come i valori di X di "disperdano" intorno al valor medio.

Def. Sia X una v.a. discreta. Si definisce **valore atteso di** X *(o valor medio di X), e si indica con $E(X)$ o con μ, la quantità*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k$$

$E(X)$ è, dunque, una media dei valori x_i, pesata con le rispettive probabilità p_i.

Esempio 1.
Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $0, 1, 2$ con probabilità rspettivamente $0.2, 0.2, 0.6$. Allora il valore atteso di X è

$$E(X) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.6 = 1.4$$

Esempio 2.
Nel lancio di una moneta, vinciamo 1 Euro se esce Testa, perdiamo 1 Euro se esce Croce. Qual è il valore atteso della v.a. X che rappresenta la vincita?

I valori assunti da X sono 1 e -1, entrambi con probabilità p=0.5. Dunque:

$$E(X) = 1 \cdot 0.5 - 1 \cdot 0.5 = 0$$

cioè la vincita media è 0.

Proprietà del valore atteso

1) $E(a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (il valore atteso di una v.a. costante è la costante stessa);
2) $E(aX) = aE(X)$
3) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4) $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, se X e Y sono v.a. indipendenti $(*)$

Nota $(*)$: Due variabili aleatorie X e Y si dicono indipendenti se $p(\{X \in I\} \cap \{Y \in J\}) = p(X \in I) \cdot p(Y \in J)$ per ogni coppia I, J di intervalli di $\mathbb{R}$.

Indici di dispersione: varianza e scarto quadratico medio

Gli indici di dispersione misurano quanto i valori di una v.a. X si discostino dal suo valor medio. Introduciamo la questione attraverso un esempio.

Siano X ed Y due variabili aleatorie con le seguenti distribuzioni

X	4	6	8	10
p	0.2	0.3	0.35	0.15

Y	3	5	7	9
p	0.12	0.2	0.29	0.39

Facendo i calcoli, si ottiene che X ed Y hanno lo stesso valor medio

$$E(X) = E(Y) = 6.9,$$

ma quale delle due presenta maggiore dispersione intorno a tale valore?

Se calcoliamo le differenze dei valori di X ed Y con la media μ, otteniamo due nuove variabili aleatorie $X - \mu$ e $Y - \mu$, che chiameremo "scarto", con le seguenti distribuzioni:

X	4	6	8	10
X-μ	-2.9	-0.9	1.1	3.1
p	0.2	0.3	0.35	0.15

Y	3	5	7	9
$Y - \mu$	-3.9	-1.9	0.1	2.1
p	0.12	0.2	0.29	0.39

Le variabili aleatorie $X - \mu$ e $Y - \mu$ hanno, però, valore atteso nullo. Infatti, in generale, data una v.a. X con valore atteso μ, risulta

$$E(X - \mu) = E(X) - E(\mu) = \mu - \mu = 0.$$

Gli scarti, dunque, non possono essere utili al fine di misurare la dispersione delle variabili X ed Y intorno alla loro media.

Consideriamo, allora, i quadrati degli scarti

$(X-\mu)^2$	8.41	0.81	1.21	9.61
p	0.2	0.3	0.35	0.15

$(Y-\mu)^2$	15.21	3.61	0.01	4.41
p	0.12	0.2	0.29	0.39

I rispettivi valori attesi sono:

$$E[(X-\mu)^2] = 8.41 \cdot 0.2 + 0.81 \cdot 0.3 + 1.21 \cdot 0.35 + 9.61 \cdot 0.15 = 3.79$$
$$E[(Y-\mu)^2] = \cdots = 4.27$$

Dal confronto dei due valori ottenuti possiamo dedurre che la v.a. X presenta una minor dispersione intorno al suo valore atteso μ rispetto alla variabile Y.

Diamo, dunque, la seguente definizione.

Def. Sia X una v.a. con valore atteso μ. Si definisce **varianza** *di X, e si indica con $Var(X)$ oppure con σ_X^2, il valore*

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Si dice **scarto quadratico medio** *di X o* **deviazione standard**, *e si indica con σ_X, il valore*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Si osservi che, a differenza della varianza, la deviazione standard è dimensionalmente omogenea ai valori di X. Ad es. se i valori di X sono lunghezze, anche σ_X ha le dimensioni di una lunghezza, mentre $Var(X)$ ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato.

Per calcolare la varianza si può usare la definizione che nel caso discreto si scrive

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i$$

oppure si può utilizzare la seguente formula

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Proprietà della varianza

1) $Var(a) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$
2) $Var(aX) = a^2 Var(X)$
3) Se X ed Y sono v.a. indipendenti, allora
$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Esercizio. Sia $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ lo spazio degli eventi del lancio di un dado non truccato e sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ la v.a. banale data dal valore del lancio del dado $X(j) = j$ per $j = 1, \dots 6$. Calcoliamo valore atteso, varianza e deviazione standard di X.

Siccome il dado non è truccato, abbiamo su Ω la *distribuzione uniforme di probabilità*, ovvero $p_j = p(X = j) = 1/6$. Quindi
$E(X) = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 + \dots p_6 \cdot 6 = 1/6(1+2+3+4+5+6) = 3.5$
Osserviamo che il valore atteso del lancio di un dado è effettivamente il valore intermedio tra tutti i possibili valori, ma non può essere il risultato di un lancio.
$Var(X) = p_1 \cdot (1-3.5)^2 + p_2(2-3.5)^2 + \dots + p_6 \cdot (6-3.5)^2 = 17.5/6 = 2.91\overline{6}$
da cui $\sigma_X = \sqrt{2.91\overline{6}} \simeq 1.71$.

La variabile aleatoria binomiale o di Bernoulli.

Sia Ω l'insieme dei possibili esiti di n esperimenti aleatori indipendenti (ad es. n lanci di un dado, le nascite di n figli).
Supponiamo che in ciascun esperimento un certo evento E (ad es. esce un numero pari, oppure la nascita di una femmina,...) abbia probabilità p di verificarsi e $q = 1 - p$ di non verificarsi.
Se $X : \Omega \to \mathbb{R}$ è la variabile aleatoria che conta il numero di volte che l'evento E accade negli n esperimenti (ovvero il numero di *successi* su *n prove*), allora X assume i valori $k = 0, 1, \dots, n$ con probabilità

$$p_k = p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Tale distribuzione di probabilità si dice **binomiale** e qualsiasi variabile aleatoria discreta che soddisfi la suddetta legge si dice **variabile aleatoria di Bernoulli di parametri (n,p)** e si indica con $\mathbf{X \sim B(n, p)}$.

Esempio. Qual è la probabilità che su 10 lanci di un dado la faccia 4 esca 3 volte?

Si tratta di calcolare la probabilità di 3 successi su 10 prove, ove la probabilità di successo su ciascuna prova è $p = 1/6$. Quindi, denotata con X la v.a. di Bernoulli di tipo (n, p) con n=10 e p=1/6, la probabilità richiesta è

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

Esercizio: Qual è la probabilità che su 8 lanci di una moneta esca Testa 6 volte? [Soluz.: $p \simeq 0.109$]

Valore atteso e varianza della v.a. di Bernoulli

Se un evento E in un esperimento bernoulliano può accadere con probabilità p, in n esperimenti ci aspettiamo che accada np volte.
In accordo con la nostra intuizione, si dimostra che il valore atteso di una v.a. di Bernoulli di tipo (n, p) è

$$E(X) = np.$$

Si prova, inoltre, che

$$Var(X) = np(1 - p).$$

Variabili aleatorie continue

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uno spazio di probabilità.

Def. Una **variabile aleatoria continua** X *su* Ω *è una funzione* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tale che*

- X *assume tutti i valori* x *di un intervallo, anche illimitato;*
- *esiste una funzione* $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *tale che* $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

ovvero la probabilità che X *assuma valori compresi tra* a *e* b *è uguale all'area della parte di piano sottesa al grafico di* f *nell'intervallo di estremi* a *e* b*.*

La funzione f si chiama **densità di probabilità** associata ad X e descrive completamente la v.a. X.

La funzione densità di una v.a. continua X gode delle seguenti proprietà:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ (cioè l'area della parte di piano compresa tra il grafico di f e l'asse delle X è pari a 1)

Le due proprietà precedenti caratterizzano le funzioni densità, nel senso che una qualunque funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrabile su tutto $\mathbb{R}$, che soddisfi le condizioni 1) e 2) è la densità di probabilità di una opportuna v.a. continua X.

La funzione di distribuzione di una v.a. continua si scrive mediante la funzione densità come segue

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Osservazione

Dalla definizione di v.a. continua, segue che, se a è un qualunque numero reale, allora

$$p(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad (*)$$

ovvero la probabilità che X assuma un determinato valore è nulla, a differenza delle variabili aleatorie discrete, per cui $p(X = x_i) = p_i \neq 0$.

Ciò che ha senso calcolare, dunque, per una v.a. continua è la probabilità che i valori di X cadano in un determinato intervallo.

Conseguenza della $(*)$ è che, per una variabile aleatoria continua X, le seguenti probabilità sono uguali

$$p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X \leq b) = p(a < X < b)$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

Valore atteso e varianza di una v.a. continua

Sia X una v.a. continua con densità di probabilità $f(x)$. Definiamo il valore atteso (o valor medio) di X e la varianza di X rispettivamente come

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

Inoltre, la deviazione standard σ_X è definita, come nel caso discreto, come la radice quadrata della varianza

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Si osservi che, rispetto al caso discreto, la sommatoria è stata sostituita da un integrale e i pesi p_i dalla funzione densità $f(x)$.

Esempi di variabili aleatorie continue.

La distribuzione uniforme

Supponiamo di voler modellizzare la scelta a caso di un numero reale x nell'intervallo $[0, 1]$.
Dividendo $[0, 1]$ in n intervalli uguali di lunghezza $1/n$, la probabilità che X appartenga a uno di essi deve essere la stessa per tutti, quindi $1/n$.
In generale, la probabilità che x cada in un intervallo $[x_1, x_2]$ contenuto in $[0, 1]$ dovrà dipendere solo dalla distanza tra x_1 e x_2, ovvero

$$p(x_1 < X \leq x_2) = x_2 - x_1.$$

Tale distribuzione si dice **uniforme su** $[0, 1]$.
In generale, su un generico intervallo $[a, b]$, la distribuzione uniforme ha la forma

$$p(x_1 < X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}.$$

Una v.a. X che assuma valori nell'intervallo $[a, b]$ e che abbia su $[a, b]$ distribuzione uniforme di probabilità, si dice **variabile aleatoria uniforme** sull'intervallo $[a, b]$.

Tale v.a. è continua con funzione densità data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a < x \leq b \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Esercizio.
Qual è la probabilità che scelto a caso un numero in $[0, 1]$, esso cada tra $1/3$ e $2/3$? Quale la probabilità che scelto a caso un numero in $[-1, 5]$, esso cada tra $1/3$ e $2/3$?

Nel primo caso, $p(1/3 \leq X \leq 2/3) = 2/3 - 1/3 = 1/3$; nel secondo, $p(1/3 \leq X \leq 2/3) = \dfrac{1/3}{6} = 1/18$.

La distribuzione Normale

In natura, la distribuzione che riveste maggiore importanza per le applicazioni è la cosiddetta distribuzione normale.

Una variabile aleatoria continua X si dice **normale**(o **gaussiana**) **di media** μ **e varianza** σ^2, e si scrive $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se la sua funzione densità è data da

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$.
Nel caso $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, la v.a. si dice **normale standard** e si indica con $N(0, 1)$.

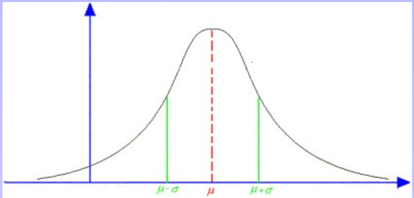
Si può verificare, svolgendo il calcolo degli integrali nella definizione, che se X è una v.a. normale, allora $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$, ovvero il valore atteso e la varianza di una v.a. normale sono esattamente i parametri μ e σ^2 che compaiono nella funzione densità.

Il grafico della densità $f(x)$ ha una tipica forma a campana e prende il nome di curva normale o gaussiana.

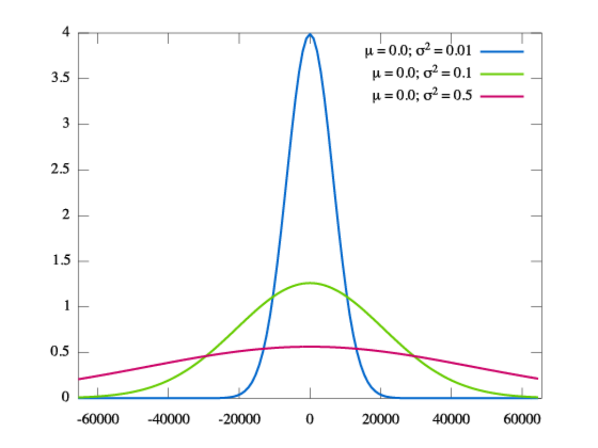
La curva gaussiana ha le seguenti caratteristiche:

- è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$
- assume valore massimo nel punto $x = \mu$;
- ha due flessi nei punti $x = \mu - \sigma$ e $x = \mu + \sigma$
- ha come asintoto orizzontale l'asse delle x;
- l'area sottesa dalla curva ha valore 1.

Grafico della gaussiana



Grafici della gaussiana per alcuni valori di σ.

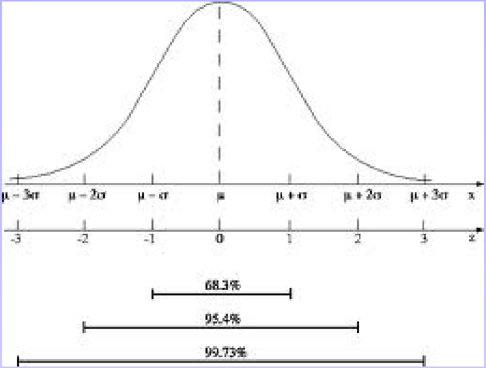


Si osservi che, al diminuire di σ, la gaussiana si concentra sempre di più intorno al valor medio μ (nel caso del grafico, intorno a 0.)

Se X è una v.a. normale $N(\mu, \sigma^2)$, si può verificare che, qualunque sia il valore di σ, risulta

- $p(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.68269$ pari al 68.27%
- $p(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$ pari al 95.45%
- $p(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$ pari al 99.73%

Dunque, la probabilità che un valore di X si discosti dalla media più di 3σ è minore dello 0.27%.



La funzione di ripartizione di una v.a. normale è

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

I valori di tale funzione non sono esprimibili mediante funzioni elementari, ma sono stati tabulati nel caso della distribuzione normale standard $N(0,1)$ (vedi le apposite tavole).
Nel caso di una v.a. normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ di parametri μ e σ qualsiasi, possiamo ricondurci ad una distribuzione normale standard mediante la seguente trasformazione:

Data una qualunque v.a. X di media μ e deviazione standard σ, dicesi **standardizzata** di X la variabile aleatoria

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

Z possiede la stessa distribuzione di X, ma con media 0 e varianza 1. (verifica per esercizio).

Dunque , nel caso $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, risulta $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Esercizio 1. Una variabile aleatoria X segue una distribuzione normale con media $\mu = 10$ e varianza $\sigma^2 = 36$. Calcolare $p(X \leq 16)$.

Denotata con $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ la standardizzata di X, si ha che
$p(X \leq 16) = p(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{16-10}{6}) = p(Z \leq 1) = 0.8413.$

Esercizio 2. Si verifichi che se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, la probabilità che i suoi valori cadano tra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ è del 68%.

Denotata con ϕ la funzione di distibuzione della normale standard, si ha che $p(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = p(-1 < Z \leq 1) = p(Z \leq 1) - p(Z \leq -1) = p(Z \leq 1) - p(Z \geq 1) = p(Z \leq 1) - [1 - p(Z \leq 1)] = \phi(1) - [1 - \phi(1)] = 2\phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.841345 - 1 = 0.68269$ che corrisponde al 68%.

Esercizio 3. In una partita di 1000 oggetti, il peso del singolo oggetto è distribuito con legge normale con media 5 kg e scarto quadratico medio 0.4 kg. Qual è il numero stimato di pezzi con peso compreso tra 4.8 e 5.2 Kg ? [Soluz.: 383 pezzi]

Misure sperimentali e distribuzione normale.

La constatazione che un insieme di misure sperimentali sia approssimabile o meno con una distribuzione normale è un fatto di natura sperimentale. Tuttavia si può prevedere in certi casi che un certo insieme di dati sperimentali abbia un andamento gaussiano anche sulla base di considerazioni teoriche.
Ad esempio, è ben noto che se si ripete più volte la misura di una grandezza, i risultati delle singole misure, che in generale non coincidono per la presenza di numerosi piccoli errori casuali, tendono a concentrarsi intorno ad un valore centrale, dando luogo ad una distribuzione di tipo gaussiano. In tal caso, se le misure non sono affette da errori sistematici (ad es. una errata taratura degli strumenti), sarà ragionevole assumere tale valore centrale come misura "vera" della grandezza in esame.
La giustificazione teorica del fatto che misure sperimentali ripetute di una stessa quantità seguano molto spesso una distribuzione normale è data dal cosiddetto **Teorema del Limite centrale**.

Teorema del Limite centrale. *Sia X_k, con $k \in \mathbb{N}$, una successione di variabili aleatorie indipendenti aventi stessa media μ e stessa varianza σ^2. Allora la variabile aleatoria $M_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ tende ad avere, per n sufficientemente grande, una distribuzione normale di media μ e varianza σ^2/n.*

Il teorema afferma, dunque, che se un fenomeno è il risultato della sovrapposizione di un numero elevato n di cause indipendenti che agiscono contemporaneamente, rappresentate dalle variabili aleatorie X_i, tale fenomeno si comporta, se n è abbastanza grande, come una variabile aleatoria normale, *anche se le cause originali non avevano distribuzione normale*.
Nel caso delle misure ripetute, se le X_i per $i = 1, \ldots, n$ rappresentano le misure di una stessa quantità fatte su n individui presi a caso in una popolazione, il teorema ci dice che, se il numero di individui del campione è abbastanza grande, la media M_n delle misure Xi tenderà ad avere una distribuzione normale, con varianza tanto più piccola, quanto più grande è n. Da ciò l'*importanza della distribuzione normale a fini statistici*.