Matematica ed Elementi di Statistica
a.a. 2017/2018
Esercizi Foglio 9 - Elementi di probabilità
(Nota: si vedano anche gli esempi e gli esercizi nelle slide.)

a) *Calcolo combinatorio*(si vedano gli esercizi nelle slide)

b) *Probabilità dell'unione e intersezione di eventi; probabilità condizionata*

1) In un esperimento si lanciano due monete non truccate e 1 dado a sei facce non truccato. Qual è lo spazio degli eventi Ω? Quanti elementi possiede?

2) Siano $A, B \subset \Omega$ due eventi tali che $p(A) = 2/25$, $p(B) = 1/5$ e $p(A \cup B) = 6/25$. I due eventi A e B sono indipendenti oppure no? Si calcoli $p(A|B)$.

3) La probabilità che l'evento A si verifichi è 0.35; la probabilità che l'evento B si verifichi è 0.20; la probabilità che gli eventi A e B si verifichino simultaneamente è 0.5. Qual è la probabilità che almeno uno dei due eventi si verifichi?

4) Nell'estrazione di un numero della tombola si considerino gli eventi $A = \{\text{esce un numero compreso strettamente tra 50 e 70}\}$ e $B = \{\text{esce un multiplo di 5}\}$. Si calcoli la probabilità di $A \cap B$, $A \cup B$, A^C, $A|B$.

5) In una piccola isola dei mari del sud, lo 0.04% della popolazione è albino e sordo, il 7.96% è albino ma non sordo, lo 0.46 % è sordo ma non albino e il 91.54 % non è ne' sordo ne' albino. L'albinismo e la sordità in questa popolazione sono eventi indipendenti o no?

6) In una scatola ci sono 7 palline bianche e 14 nere. Qual è la probabilità che facendo due estrazioni successive con reimbussolamento si abbia che:
a) la prima pallina estratta è bianca e la seconda nera;
b) le palline sono dello stesso colore.
Quanto valgono le precedenti probabilità nel caso in cui le estrazioni avvengano senza reimbussolamento? [Soluz.: a) 2/9; b) 5/9;...]

c) *Variabili aleatorie discrete*

1) Calcolare il valore atteso, la varianza e lo scarto quadratico medio di una v.a. discreta X che assume i valori $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, $x_4 = 5$, $x_5 = 2$ con probabilità $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.2$, $p_4 = 0.1$, $p_5 = 0.3$.

2) Nella lotteria annuale del circolo ricreativo hai la probabilità del 5% di vincere 100 Euro, la probabilità del 20% di vincere 20 Euro e la probabilità del 75% di non vincere nulla. Quanto ti aspetti di vincere in media?

3) Sia Ω lo spazio degli eventi del lancio di due dadi e sia $X : \Omega \to \mathbb{N}$ la v.a. che misura il prodotto delle facce dei due dadi: $X(i, j) = i \cdot j$. Determinare:
a) $p(X \geq 16)$ b) $p(6 \leq X < 8)$ c) $p(X = 12)$ d) $p(1 \leq X \leq 40)$ e) $p(X > 2)$

4) Calcolare la probabilità che su 10 estrazioni di una carta da un mazzo di 40 esca per 3 volte un asso.
(Sugg.: si usi la v.a. di *Bernoulli* di parametri $n = 10$ e $p = 1/10$) [Soluz.: $p \sim 0.057$]

5) La percentuale di mancini in Italia è di circa il 12%. Qual è la probabilità che in una classe di 12 bambini esattamente 2 siano mancini? (Sugg.: si usi la v.a. di *Bernoulli*...)

d) *Variabili aleatorie continue*

1) Determinare il parametro reale c affinchè la funzione

$$f(x)=\begin{cases} c(2+x-x^2) & \text{se} -1 < \text{x} \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

risulti la densità di una variabile aleatoria continua X. Dopo aver disegnato il grafico di $f(x)$ in corrispondenza del valore di c trovato, calcolare la probabilità che X assuma valori minori di 0. [Soluz.: $c = 2/9, p \sim 0.26$]

e) *Esercizi sulla distribuzione normale*

1) Una v.a. X segue una distribuzione normale $N(0, 1)$. Calcolare la probabilità che X assuma valori compresi tra 1.43 e 2.56.

Soluz.: $p(1.43 \le X \le 2.56) = p(X \le 2.56) - p(X \le 1.43) = 0.994766 - 0.923641 = 0.071125$, *usando le tavole dei valori della distribuzione normale standard.*

2) Le altezze di una popolazione di uomini seguono una distribuzione normale con valore atteso $\mu = 168.75$ cm e $\sigma = 6.25$ cm. Calcolare la probabilità di avere individui:
a) che superino 176.25 cm di altezza;
b) che siano al di sotto di 167.5 cm.
c) che abbiano altezza compresa tra 162.5 cm e 170 cm.

Soluz.: a) Tenuto conto che se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, *allora* $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, *si ha che* $p(X > 176.25) = p\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} > \dfrac{176.25 - 168.75}{6.25}\right) = p(Z > 1.20) = 1 - p(Z \le 1.20) = 1 - 0.884930 = 0.11507$; b) $p(X < 167.5) = p(Z < -0.20) = p(Z > 0.20) = 1 - p(Z \le 0.20) = 1 - 0.579260 = 0.42074.$; c) $p(162.5 \le X \le 170) = p(-1 \le Z \le 0.2) = p(Z \le 0.2) - p(Z \le -1) = p(Z \le 0.2) - [1 - p(Z \le 1)] = 0.579260 - (1 - 0.841345) = 0.420605$

3) A partire dai risultati del precedente esercizio, stimare, su una popolazione di 2000 individui, il numero di individui appartenenti a ciascuna delle classi a), b), c).

Soluz.: Basterà moltiplicare il numero complessivo di individui per i rispettivi valori di probabilità, ad es. a) il numero stimato di individui con altezza superiore a 176.25 cm è $0.11507 \cdot 2000 = 230$*; b) 841; c) 841.*

4) Una macchina confeziona sacchetti di caramelle con peso medio $\mu = 200$ g e deviazione standard $\sigma = 10$ g.
a) Qual è la percentuale di sacchetti che pesano più di 220 g?
b) Se ad un controlo vengono scartati i sacchetti con peso inferiore a 180 g, su 1000 sacchetti quanti si prevede verranno scartati?

5) Mediante l'uso delle tavole, calcolare i quantili gaussiani z_α di ordine $\alpha = 0.55, 0.70, 0.30$.