

**Esercizi Foglio 7 - Integrali**

a) Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\begin{array}{llll}
 1) \int (x\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x^2}) dx & 2) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx & 3) \int \frac{2x+1}{x-2} dx & 4) \int \frac{1}{(3x-2)^2} dx \\
 \\ 
 5) \int \sin^3 x \cos x dx & 6) \int \frac{\ln x}{x} dx & 7) \int \frac{4}{x(x-2)} dx & 8) \int \frac{2x-1}{x^2-5x+6} dx \\
 \\ 
 9) \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx & 10) \int \frac{x^4+3x}{x^2-1} dx & 11) \int x^2 \log x dx & 12) \int 2x e^{2x} dx \\
 \\ 
 13) \int x \sqrt{x^2-5} dx & 14) \int \frac{e^x}{e^x+5} dx & 15) \int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx & 16) \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} dx
 \end{array}$$

Soluz.: 1)  $\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} - \frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2} + c;$

2)  $x - \arctan x + c$

3)  $2x + 5 \ln|x-2| + c$

4)  $-\frac{1}{3(3x-2)} + c$

5)  $\sin^4 x + c$

6)  $\frac{\ln^2 x}{2} + c$

7)  $-2 \ln|x| + 2 \ln|x-2| + c$

8)  $-3 \ln|x-2| + 5 \ln|x-3| + c$

9)  $\arctan(x+1) + c$

10)  $\frac{x^3}{3} + x + 2 \ln|x-1| + \ln|x+1| + c$

11)  $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$

12)  $e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + c$

13)  $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2-5)^3} + c$

14)  $\ln(e^x+5) + c$

15)  $\frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) + c$

16)  $2 \ln|\sqrt{x}-3| + c;$

b) Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\begin{array}{llll}
 1) \int_0^2 x(x^2-1)^3 dx & 2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx & 3) \int_{-3}^{-1} \frac{x^2+2}{x^2} dx & 4) \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx \\
 \\ 
 5) \int_1^e \ln x dx & 6) \int_0^1 \arctan x dx & 7) \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+3} dx & 8) \int \frac{x^3}{x-2} dx
 \end{array}$$

Soluz.: 1) 10; 2) 0; 3)  $\frac{10}{3}$ ; 4)  $\frac{\pi}{8}$ ; 5) 1; 6)  $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 4}{4}$ ; 7)  $4 + 6 \ln\left(\frac{3}{5}\right)$ ; 8)  $\frac{7}{3} - 4 \ln 2$

c) Calcolare le aree delle seguenti regioni di piano, dopo averle rappresentate graficamente:

- 1) l'area della regione di piano delimitata dalla parabola di equazione  $y = -x^2 + 9x$ , dall'asse delle  $x$  e dalle rette di equazione  $x = 2$  e  $x = 5$ ;
- 2) l'area della regione di piano contenuta nel quarto quadrante e delimitata dalla parabola di equazione  $y = x^2 - 3x + 2$  e dall'asse delle ascisse;
- 3) l'area della regione di piano compresa tra le curve di equazione  $y = \sqrt{x}$  e  $y = x^3$  nell'intervallo  $[0, 1]$ .

d) Stabilire se l'integrale improprio della funzione  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  sull'intervallo  $[2, +\infty)$  converge e, in tal caso, calcolarne il valore.

e) Calcolare la media integrale della funzione  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 3}$  nell'intervallo  $[0, 2]$ .

f) Stabilire per quale valore del parametro reale  $c$  la funzione definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} c(5x - 4 - x^2) & \text{se } x \in [1, 4] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è la densità di una variabile aleatoria continua  $X$ . Disegnare il grafico di  $f$  in corrispondenza del valore di  $c$  trovato e calcolare la probabilità che  $X$  assuma valori maggiori di 2.