

Esercizi - Foglio 4
Limiti di funzione

1) Calcolare i seguenti limiti

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+7}{2x^2-3x+1}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3-x^2+3}{x^2+x+1}$ | 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left \frac{-3x^3-x^2+2}{4x^3-2x+1} \right $ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^5-3x}{2x^5+1}}$ | 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2-x}$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x + e^{-x}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{5x^3+4x+3}}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + \log x + \arctan x$ |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{3x - \cos x}$ |
| 13) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^3+3x^2-2x-6}{(x+3)^2}$ | 14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^4+3x}{x+5}}$ | 15) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \log_2 x - \frac{1}{x}$ |
| 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4-2x^3+5x}{x^5-x}$ | 17) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}+x}{x}$ | 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{5/2}+2x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x^5}-1}$ |

(Soluzioni: 1) 0; 2) $-\infty$; 3) $3/4$; 4) $\sqrt[3]{1/2}$; 5) $+\infty$; 6) $1/2$; 7) $\pi/2$; 8) $2/\sqrt[3]{5}$; 9) $+\infty$; 10) $3/4$; 11) $+\infty$; 12) $1/3$; 13) $-\infty$; 14) $-\infty$; 15) $-\infty$; 16) -5 ; 17) 1 ; 18) $1/2$.)

2) Calcolare i seguenti limiti, utilizzando i limiti notevoli

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin 1/x$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\log(1+3x^2)}$ | 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ | 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(3x^2)}{\log(1+4x^3)}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+5x^2)}{x^2 \sin x}$ | 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x+3}{x+1} \right)$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ |

(Soluzioni: 1) 1; 2) $1/3$; 3) $-1/2$; 4) 2; 5) $3/4$; 6) $+\infty$; 7) 2; 8) $1/3$.)

3) Calcolare i seguenti limiti

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + e^x - \log x}{\sqrt{x} - x^2}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + e^x}{e^{2x} - x^2 + 1}$ | 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - e^{-x} + 1/x$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log x$ | 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^5 + \sin x}{x + x^3}$ |

(Soluzioni: 1) $-\infty$; 2) 0; 3) $\pi/2$; 4) 0; 5) 0; 6) 1.)

4) Determinare gli eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{lll} (a) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} & (b) \quad f(x) = \frac{1}{1 - e^x} & (c) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \\ (d) \quad f(x) = \frac{x - 1}{x + 1} & (e) \quad f(x) = x + 1/x & (f) \quad f(x) = \frac{e^x + x^3}{x^2 - 2x} \end{array}$$

(Soluz.: (a) $x = 1$, $x = 3$, $y = x + 4$; (b) $x = 0$, $y = 1$ (per $x \rightarrow -\infty$), $y = 0$ (per $x \rightarrow +\infty$); (c) $y = x$ (per $x \rightarrow +\infty$), $y = -x$ (per $x \rightarrow -\infty$); (d) $x = -1$, $y = 1$; (e) $x = 0$, $y = x$; (f) $x = 0$, $x = 2$, $y = x + 2$ (per $x \rightarrow -\infty$)).

5) Determinare dominio, segno e limiti significativi delle seguenti funzioni, e tracciarne un grafico qualitativo.

$$\begin{array}{lll} (a) \quad f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - x - 6} & (b) \quad f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} & (c) \quad f(x) = \frac{\log x}{x^2} \\ (d) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} & (e) \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{(x + 1)^3} & (f) \quad f(x) = \frac{\ln(x - 1)}{x^2 - 9} \\ (g) \quad f(x) = \frac{e^{(x-1)/x^2}}{3 - x} & (h) \quad f(x) = \left| \frac{x}{1 - x^2} \right| & (i) \quad f(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 3} \end{array}$$

(Soluz.: (a) $f(x)$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$, positiva per $-2 < x \leq 2$ e per $x > 3, \dots$; (b) f definita in $[-1, 0) \cup (0, 1]$, positiva per $0 < x \leq 1 \dots$; (c) $f(x)$ definita in $(0, +\infty)$, positiva per $x > 1, \dots$; (d) $f(x)$ definita in $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$, positiva in tutto il dominio, tranne in $x = 1$, dove si annulla, $\dots$; (e) $f(x)$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, positiva per $x < -1$ e $x > 0 \dots$)