Matematica ed Elementi di Statistica
a.a. 2019/2020

Esercizi - Foglio 3
Dominio, zeri, segno di funzioni - Generalità sulle funzioni - Trasformazioni di grafici

Esercizi su dominio, zeri e segno di funzioni

a) *Determinare dominio, zeri e segno delle seguenti funzioni e riportare le informazioni ottenute su di un grafico*

1) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-4x+3}$ $\quad (D = \mathbb{R} \setminus \{1,3\};\ \ f(x) > 0$ per $-5 < x < 1 \vee x > 3;\ f(x) = 0$ per $x = -5)$

2) $f(x) = \dfrac{(9x^2-9x)(x^3+8)}{x^2+2}$ $\quad (D = \mathbb{R};\ f(x) > 0$ per $-2 < x < 0 \vee x > 1;\ f(x) = 0$ per $x = -2, 0, 1)$

3) $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2}$ $\quad \big(D =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup \{0\} \cup]\sqrt{2}, +\infty[;\ f(x) \geq 0\ \forall x \in D;\ f(x) = 0$ per $x = 0, \pm\sqrt{2}\big)$

4) $f(x) = 5^{x^4 - \frac{1}{x}}$ $\quad (D = \mathbb{R} \setminus \{0\};\ f(x) > 0\ \forall x \in D)$

5) $f(x) = \log_3(x^2-5)$

$\big(D =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[;\ f(x) \geq 0$ per $x < -\sqrt{6} \vee x > \sqrt{6};\ f(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{6}\big)$

6) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^2-2}}$ $\quad \big(D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\};\ f(x) > 0$ per $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2};$ nessuno zero$\big)$

7) $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+2}\right) e^{-3x}$ $\quad (D = \mathbb{R} \setminus \{-2\};\ f(x) > 0$ per $x < -2 \vee x > 2;\ f(x) = 0$ per $x = 2)$

8) $f(x) = |x^2-2| e^{2/x}$ $\quad \big(D = \mathbb{R} \setminus \{0\};\ f(x) \geq 0\ \forall x \in D;\ f(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{2}\big)$

9) $f(x) = \dfrac{\ln(x-7)}{\sqrt{x+2}}$ $\quad (D =]7, +\infty[,\ f(x) > 0$ per $x > 8;\ f(x) = 0$ per $x = 8)$

10) $f(x) = \dfrac{x^3 e^x}{|x| - 7}$ $\quad (D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 7\};\ f(x) > 0$ per $-7 < x < 0 \vee x > 7;\ f(x) = 0$ per $x = 0)$

11) $f(x) = \dfrac{\ln(x)+1}{e^x - 1}$ $\quad (D =]0, +\infty[;\ f(x) > 0$ per $x > 1/e;\ f(x) = 0$ per $x = 1/e)$

12) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$

$\big(D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\};\ f(x) > 0$ per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi;\ f(x) = 0$ per $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\big)$

13) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x+7}\right)$ $\quad (D = \mathbb{R} \setminus \{-7\};\ f(x) > 0$ per $x < -7 \vee x > 0;\ f(x) = 0$ per $x = 0)$

14) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{\sqrt{x+2} - 3}$ $\quad (D =]0, 7[\cup]7, +\infty[;\ f(x) > 0$ per $0 < x < 1 \vee x > 7;\ f(x) = 0$ per $x = 1)$

15) $f(x) = \dfrac{3^x - 2}{|x+2| - 3}$

$(D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\};\ f(x) > 0$ per $-5 < x < \log_3 2 \vee x > 1;\ f(x) = 0$ per $x = \log_3 2)$

Generalità sulle funzioni

1) *Siano f e g le funzioni assegnate di seguito. Scrivere le espressioni di $g \circ f$ e $f \circ g$, determinandone i domini*:

a) $f(x) = x^2 - 3$ $\qquad g(x) = \log(1-x)$
b) $f(x) = \dfrac{7x}{x+1}$ $\qquad g(x) = \sqrt{2-x}$

2) *Data la funzione $h(x) = \dfrac{2e^x + 1}{2e^{2x} + 2}$, esprimere h come prodotto di composizione in cui uno dei fattori è $f(x) = e^x$.*

3) *Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari (o non hanno simmetrie)*

a) $\dfrac{x}{x^2+1}$ $\qquad b)\dfrac{x^4+1}{|x|-3}$ $\qquad c)x \sin x$ $\qquad d)\dfrac{2x^5}{x^3+1}$ $\qquad e)\dfrac{x^3}{|x+1|}$

4)*Verificare che*
a) se f e g sono entrambe crescenti o entrambe decrescenti, allora $f \circ g$ è crescente;
b) se f e g sono una crescente e l'altra decrescente, allora $g \circ f$ è decrescente.

5) *Dimostrare che la funzione $f(x) = e^{x+5} - 2$ è invertibile e calcolare l'inversa, specificandone il dominio.*

Esercizi sulle trasformazioni di grafici

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, utilizzando i grafici delle funzioni elementari. Indicare, inoltre, dominio e immagine di ciascuna funzione.

$f(x) = x^2 + 2$ $\quad$ $f(x) = 3(x^2 - 1)$ $\quad$ $f(x) = 3 - x^2$ $\quad$ $f(x) = (x + 1)^2 - 1$

$f(x) = |2x^2 - 4x + 7|$ $\quad$ $f(x) = 2x^2 - 4|x| + 7$ $\quad$ $f(x) = x^3 - 1$ $\quad$ $f(x) = |x^3 - 1|$

$f(x) = e^{x+1}$ $\quad$ $f(x) = -e^x + 5$ $\quad$ $f(x) = e^{-x}$ $\quad$ $f(x) = |e^x - 3|$

$f(x) = |\ln(x)|$ $\quad$ $f(x) = \ln(|x|)$ $\quad$ $f(x) = -\log(x - 3)$ $\quad$ $f(x) = \log_{1/3}(x + 2)$

$f(x) = \sqrt{x + 3}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt{|x|}$ $\quad$ $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ $\quad$ $f(x) = |\sin x|$

$f(x) = \sin(2x)$ $\quad$ $f(x) = 2\cos(x - \pi/2)$ $\quad$ $f(x) = \arctan x + \pi/2$ $\quad$ $f(x) = -3\cos x$