Matematica ed Elementi di Statistica
a.a. 2016/2017

Esercizi - Foglio 5
Continuità e derivabilità - Calcolo delle derivate e applicazioni - Limiti con de l'Hôpital

1. Continuità e derivabilità

1) Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & per\ x<0 \\ e^x & per\ 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & per\ x>1 \end{cases}$$

In quali punti è discontinua? Di che tipo di discontinuità si tratta? Disegnare il grafico di f.

2) Si determini il parametro k affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+2x)}{x}, & x>0 \\ x^2+k, & x \leq 0 \end{cases}$$

risulti continua in 0.

3) Si studi la continuità e la derivabilità in 0 delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

.

(Soluz: f è continua e derivabile in 0, con $f'(0)=0$; g è continua in 0, ma non derivabile.)

4) Si provi che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ x^2+1 & x<0 \end{cases}$$

non è derivabile in 0 ed ha in $x=0$ un punto angoloso. Si disegni, inoltre, il grafico di f e le tangenti sinistra e destra in $x=0$.

2. Calcolo delle derivate e applicazioni

1) Si calcoli la derivata delle seguenti funzioni, specificandone il dominio:

$$a)\ f(x) = \sqrt{x^2+3x-1} \qquad b)\ f(x) = (x^3+5)e^{5x} \qquad c)\ f(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$$

$$d)\ f(x) = \sqrt[5]{x} + 3\sqrt[5]{x^2} \qquad e)\ f(x) = \arctan(2x+5) \qquad f)\ f(x) = x^3 \ln x$$

[*Soluz:* $a)\ f'(x) = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}}$; $b)\ f'(x) = (5x^3+3x^2+25)e^{5x}$; $c)\ f'(x) = \dfrac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}$;
$d)\ f'(x) = \dfrac{1+6\sqrt[5]{x}}{5\sqrt[5]{x}}$; $e)\ f'(x) = \dfrac{1}{2x^2+10x+13}$; $f)\ f'(x) = x^2(3\ln x + 1)$.]

2) Si calcoli la derivata delle seguenti funzioni e si determini la retta tangente al grafico nel punto indicato

1) $f(x) = \ln(1 + 3x^2)$ *(nel punto* $x = 1$*)*
2) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ *(nel punto* $x = 2$*)*
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ *(nel punto* $x = 0$*)*

Soluz.: 1) $f'(x) = \dfrac{6x}{1 + 3x^2}$; $f(1) = \ln 4$, $f'(1) = 3/2$, *dunque la retta tangente nel punto di ascissa 1 ha equazione* $y - \ln 4 = 3/2(x - 1)$, *ovvero* $y = 3/2x - 3/2 + \ln 4$
Soluz.: 2) $f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}$; $f(2) = 4e^{-4}$, $f'(2) = -12e^{-4}$, *dunque la retta tangente nel punto di ascissa 2 è* $y = -12e^{-4}x + 28e^{-4}$.
Soluz.: 3) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$; *equazione della retta tangente nel punto di ascissa 0:* $y = -1$

3) *Determinare gli intervalli di monotonia delle seguenti funzioni e gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo, specificando se sono massimi o minimi assoluti:*

$$1)\ f(x) = x \log x \qquad 2)\ f(x) = (x^2 - 8)e^x \qquad 3)\ f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2} \qquad 4)\ f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Soluz. 1) $f'(x) = \log x + 1$, $x = e^{-1}$ *punto di minimo relativo, (anche assoluto).*
Soluz.2) $f'(x) = (x^2 + 2x - 8)e^x$, $x = -4$ *punto di massimo relativo (non assoluto),* $x = 2$ *punto di minimo relativo (anche assoluto).*
Soluz.3) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2}$, $x = 2 - \sqrt{5}$ *e* $x = 2 + \sqrt{5}$ *rispettivamente punti di minimo e massimo relativo per* f *(non assoluti).*
Soluz. 4) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$, $x = 0$ *punto di minimo relativo (anche assoluto).*

4) *Determinare gli intervalli di convessità e concavità delle seguenti funzioni:*

$$1) f(x) = e^{-x^2} \qquad 2) f(x) = (x^2 + 1)/e^x \qquad 3) f(x) = x/\log x$$

(Soluz.: 1) convessa per $x > \sqrt{2}/2$ *e* $x < -\sqrt{2}/2$, *concava per* $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$; *2) convessa per* $x < 1$ *e* $x > 3$, *concava per* $1 < x < 3$; *3) convessa per* $1 < x < e^2$, *concava per* $0 < x < 1, x > e^2$*.)*

3. Limiti con la regola di de L'Hopital

Calcolare i seguenti limiti con la regola di de L'Hôpital.

$$1)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\log x} \qquad 2)\ \lim_{x \to 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2} \qquad 3)\ \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x^5} \qquad 4)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log(\tan x)}$$

$$5)\ \lim_{x \to +\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2}) \qquad 6)\ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad 7)\ \lim_{x \to 0^+} (x)^{\sin x} \qquad 8)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{\log(e^x + 1)}{\log(3^x + 1)}$$

Soluz.: 1) $1/2$; 2) $4(\log 2 - 1)$; 3) $+\infty$; 4) 1; 5) -1; 6) $1/2$; 7) 1; 8) $+\infty$.