Esame di Elementi di Analisi Reale e Complessa (ex Istituzioni di Analisi Superiore 1)

Questo documento è rivolto a tutti coloro che sosterranno l'esame di Elementi di Analisi Reale e Complessa oppure l'esame di Istituzioni di Analisi Superiore 1 a partire dal primo appello di gennaio 2026 fino all'appello di novembre 2026, indipendentemente dall'anno accademico in cui hanno frequentato il corso.

Informazioni pratiche

- Per sostenere l'esame è necessario iscriversi su Esse3.
- Per ciascun appello la data indicata su Esse3 indica il giorno di inizio dell'appello stesso, in genere coincidente con il primo turno di esami.
- Al momento dell'iscrizione si deve indicare nelle note "urgente" (se si desidera essere esaminati durante il primo turno disponibile) oppure "non urgente" (se si desidera essere esaminati nella settimana successiva a quella di inizio dell'appello).
  Nota: per gli appelli di febbraio, aprile e novembre verranno previsti turni per esami "non urgenti" anche nella seconda settimana successiva a quella di inizio dell'appello.
- La chiusura delle iscrizioni è fissata al settimo giorno precedente l'inizio dell'appello.
  Nel giorno successivo alla chiusura delle iscrizioni coloro che si sono iscritti all'appello verranno contattati per email (all'indirizzo istituzionale @studenti.uniba.it) per concordare l'assegnazione ai turni.
- Con l'intento di favorire il completamento del percorso formativo da parte di studentesse e studenti fortemente in ritardo, a coloro la cui frequenza per l'esame (secondo quanto riportato su Esse3) è attribuita nell'anno accademico 2022/2023 o precedenti, è consentito il frazionamento dell'esame nelle parti "Analisi Reale" e "Analisi Complessa".
  Le due parti potranno essere sostenute in qualsiasi ordine; dovranno essere sostenute in due appelli consecutivi.
  Al momento dell'iscrizione su Esse3 coloro che intendono avvalersi del frazionamento dovranno indicare nelle note "analisi reale" oppure "analisi complessa" (oltre a "urgente" oppure "non urgente").

Contenuti dell'esame

- Nelle pagine seguenti sono elencati gli argomenti che saranno oggetto di esame, raggruppati per attinenza.
- Per superare l'esame è indispensabile conoscere approfonditamente (cioè con definizioni, esempi, controesempi, enunciati, dimostrazioni se presentate a lezione) gli argomenti segnati in carattere **grassetto** e conoscere (con definizioni ed enunciati) gli argomenti segnati in carattere normale.
- Per superare l'esame con una valutazione non inferiore a 24/30 è necessario conoscere approfonditamente anche gli argomenti segnati in carattere normale e conoscere gli argomenti segnati in *corsivo*.
- Per superare l'esame con una valutazione non inferiore a 28/30 è necessario conoscere approfonditamente anche gli argomenti segnati in carattere *corsivo*.

1 – TEORIA DELLA MISURA E DELL'INTEGRAZIONE ASTRATTA

- σ-**algebre**; **esempi**, proprietà; σ-algebra immagine.
- σ-algebra generata; σ-**algebra di Borel**.
- **Funzioni misurabili**; esempi; criterio di misurabilità per funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$.
- Come ottenere funzioni misurabili partendo da funzioni misurabili: operazioni algebriche, composizione funzionale, passaggio a estremo superiore, estremo inferiore, massimo limite, minimo limite, limite.
- **Funzioni semplici**; approssimazione di funzioni misurabili positive mediante funzioni semplici.
- **Definizione di misura**; **esempi**, proprietà.
- **Misure complete**; completamento di una misura.
- **Definizione di integrale per funzioni semplici**; proprietà di monotonia e di linearità; misura indotta da una funzione semplice positiva.
- **Definizione di integrale per funzioni misurabili positive**; proprietà di monotonia e di linearità; misura indotta da una funzione positiva.
- **Definizione di integrale per funzioni sommabili**; proprietà di linearità; disuguaglianza triangolare.
- Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: **convergenza monotona**, **lemma di Fatou**, **convergenza dominata**.
- Teoremi di integrazione termine a termine: per serie di funzioni positive, per serie di funzioni sommabili.
- **Insiemi trascurabili**; proprietà vere quasi ovunque.
- *Convergenza quasi uniforme*; *teorema di Severini-Egoroff*.
- Misure assolutamente continue; caratterizzazione dell'assoluta continuità.
- Proprietà dell'integrale di Lebesgue: assoluta continuità, concentrazione.
- *Successioni equi-integrabili*; *teorema di Vitali*.

2 – APPROFONDIMENTI SULLA MISURA DI LEBESGUE

- Costruzione della misura di Lebesgue: intervalli, plurintervalli, insiemi aperti, insiemi compatti, misura interna e misura esterna, misurabilità di insiemi illimitati e di insiemi qualsiasi.
  Nota: per questo punto non è richiesta alcuna dimostrazione.

- Sigma-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e misura di Lebesgue.
- Caratterizzazioni degli insiemi misurabili secondo Lebesgue: mediante insiemi misurabili, mediante aperti e chiusi, mediante insiemi boreliani.
- **Misurabilità degli insiemi boreliani**. Esistenza di insiemi non boreliani misurabili secondo Lebesgue. *Esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue*.
- **Completezza della misura di Lebesgue**. *Esempi di misure non complete*.
- **Misure boreliane**. Misure regolari. **Regolarità della misura di Lebesgue**. *L'uguaglianza tra misura esterna e misura interna non implica la misurabilità*.
- **Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue**. **Caratterizzazione delle misure boreliane finite sui compatti e invarianti per traslazioni**.
- **Misura di Lebesgue e trasformazioni lineari**. *Interpretazione geometrica del determinante di una matrice*.
- *Misurabilità secondo Lebesgue e secondo Peano-Jordan*. *Integrale di Lebesgue e integrale di Riemann*.

3 – SPAZI DI LEBESGUE

- Disuguaglianza di Jensen; conseguenze.
- Esponenti coniugati. Disuguaglianza di Young. Disuguaglianza di Hölder. Disuguaglianza di Minkowski.
- Funzioni a potenza p-esima sommabile. Maggioranti essenziali; estremo superiore essenziale; funzioni essenzialmente limitate.
- **Lo spazio semi-normato** $\mathcal{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{X},\mu)$ e lo **spazio normato** $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{X},\mu)$. **Completezza di** $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{X},\mu)$. Convergenza in norma e convergenza puntuale.
- *Disuguaglianza di Hölder generalizzata*. *Disuguaglianza di interpolazione*. Immersioni tra spazi L^p e tra spazi ℓ^p.
- Funzioni semplici speciali. Densità delle funzioni semplici speciali in $L^p(X,\mu)$.
- Lemma di Urysohn. Teorema di Lusin; *i tre principi di Littlewood*. **Densità di** $\mathbf{C_c}(\mathbb{R}^{\mathbf{N}})$ **in** $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{N}})$. Densità di $C_c(\mathbb{R}^N)$ in $C_0(\mathbb{R}^N)$. *Separabilità degli spazi* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

4 – TEORIA ELEMENTARE DEGLI SPAZI DI HILBERT

- Prodotto scalare. Norma indotta da un prodotto scalare. **Spazi di Hilbert**.
- Identità di polarizzazione. Identità del parallelogramma.
- **Teorema di minima norma in convessi chiusi**; ruolo della convessità; *ruolo dell'identità del parallelogramma*.
- Ortogonale di un vettore e di un insieme; proprietà. **Teorema delle proiezioni ortogonali**; **corollari**. Teorema di Riesz di rappresentazione di funzionali lineari continui.
- Sistemi ortonormali. Coefficienti di Fourier. Proprietà dei sistemi ortonormali finiti.
- Condizione sufficiente per isometrie surgettive. **Proprietà dei sistemi ortonormali: disuguaglianza di Bessel, teorema di Riesz-Fischer**.
- **Sistemi ortonormali massimali**. Esistenza di sistemi ortonormali massimali; *teorema di massimalità di Hausdorff*. **Caratterizzazione dei sistemi ortonormali massimali**. Decomposizione rispetto a un sistema ortonormale massimale. *Cardinalità dei sistemi ortonormali massimali in uno spazio di Hilbert.* Caratterizzazione degli spazi di Hilbert separabili.
- Sistema trigonometrico; polinomi trigonometrici e serie trigonometriche. Approssimazione uniforme di funzioni continue mediante polinomi trigonometrici. **Massimalità del sistema trigonometrico**; conseguenze. *Serie trigonometriche per funzioni sommabili. Lemma di Riemann-Lebesgue.*

5 – INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE FUNZIONI OLOMORFE

- Il campo dei numeri complessi; nozioni topologiche e metriche in $\mathbb{C}$: successioni di Cauchy e successioni convergenti, completezza di $\mathbb{C}$, dischi, insiemi aperti e insiemi chiusi, insiemi limitati, insiemi compatti.
- **Funzioni complesse di variabile complessa e loro parte reale e parte immaginaria**; **limiti e continuità di funzioni complesse**.
- **Funzioni olomorfe e loro proprietà**; **caratterizzazione delle funzioni olomorfe in un punto mediante la differenziabilità della parte reale e immaginaria e le condizioni di Cauchy-Riemann**; derivate parziali di una funzione olomorfa; *interpretazione geometrica della derivata.*
- Caratterizzazione delle funzioni olomorfe con derivata nulla; teoremi di Liouville per funzioni olomorfe a valori in una retta; funzioni olomorfe con modulo costante.
- Primitive di una funzione complessa e loro proprietà.

- Funzione esponenziale; funzioni trigonometriche; funzioni iperboliche; funzioni polidrome e loro selezioni; funzione argomento; logaritmo complesso e sue selezioni olomorfe; funzione potenza.

- Curve a valori complessi e loro regolarità; curve equivalenti, cammini; lunghezza di una curva; cammino opposto, somma di curve.

- **Integrale curvilineo di una funzione lungo una curva e sue proprietà**; **forme differenziali canoniche associate ad una funzione complessa**; **funzioni olomorfe e forme differenziali**; **primitive di una funzione complessa e forme differenziali, caratterizzazione dell'esistenza di primitive di una funzione complessa**.

- Serie numeriche a valori complessi e loro convergenza; successioni e serie di funzioni complesse, convergenza, convergenza assoluta, convergenza uniforme, convergenza totale, relazione con gli integrali curvilinei, teoremi di scambio; serie di potenze e loro raggio di convergenza; **teorema di derivabilità delle serie di potenze e corollari**; unicità dei coefficienti di una serie di potenze; funzioni analitiche; **olomorfia delle funzioni analitiche**.

6 – ANALITICITÀ DELLE FUNZIONI OLOMORFE E TEOREMA DI CAUCHY

- **Integrali di Cauchy e loro analiticità**.

- Componenti connesse di $\mathbb{C}$ privato del supporto di un circuito; indice di un punto rispetto ad un circuito. *interpretazione geometrica dell'indice*; **teorema sulle proprietà dell'indice**.

- **Teorema di Goursat**; **Teorema di Cauchy nei convessi, prima e seconda versione**; **Formula di Cauchy in un convesso**; **Analiticità delle funzioni olomorfe**; **formula per le derivate di una funzione olomorfa**; teorema della media per funzioni olomorfe; teorema di Morera.

- **Teorema di Cauchy, caso generale**; *applicazioni al calcolo di integrali*; omologia dei circuiti omotopi; **caratterizzazione delle funzioni olomorfe**.

7 – ULTERIORI PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI OLOMORFE

- **Stima per le derivate di una funzione olomorfa**; teorema di Liouville per funzioni intere; *generalizzazioni del teorema di Liouville, teorema fondamentale dell'algebra*.

- Successioni di funzioni olomorfe, teorema di Morera-Weierstrass.

- Zeri di funzioni e loro punti di accumulazione; **teorema degli zeri e sue conseguenze**; ordine di uno zero di una funzione olomorfa; *numerabilità dell'insieme degli zeri di una funzione olomorfa*.

- **Funzioni armoniche, definizione ed esempi**; **relazione tra funzioni armoniche e parte reale e parte immaginaria di una funzione olomorfa**; funzione armonica coniugata; *esistenza dell'armonica coniugata in aperti semplicemente connessi*.

8 – TEOREMA DEI RESIDUI E APPLICAZIONI

- Singolarità isolate; serie di Laurent e loro insieme di convergenza; **formula di Laurent**; sviluppabilità in serie di Laurent di funzioni olomorfe in un anello; insieme di convergenza della parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent; convergenza totale della parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent, unicità dei coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent.

- Classificazione delle singolarità isolate di una funzione complessa; **caratterizzazione delle singolarità eliminabili**; **caratterizzazione dei poli**; **caratterizzazione delle singolarità essenziali**.

- Residuo di una funzione olomorfa in una singolarità isolata; regole di calcolo per i residui mediante limiti e derivate; **teorema dei residui**; *applicazioni del teorema dei residui: calcolo di integrali di funzioni complesse, calcolo di integrali impropri di funzioni reali*; *Lemmi di Jordan*.

- Funzioni meromorfe; **principio dell'argomento**; **teorema di Rouché**; *applicazioni allo studio delle radici di un polinomio e all'esistenza di punti fissi di funzioni olomorfe*; teorema dell'applicazione aperta; teorema del massimo modulo e suoi corollari, teorema del minimo modulo e corollari; *massimi e minimi di funzioni armoniche*.

Testi consigliati

- G.B. Folland, Real Analysis, Wiley-Interscience
- S. Lang, Complex Analysis, Springer–Verlag
- W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw–Hill Book Company
- E. M. Stein, R. Shakarchi, Complex Analysis, Princeton University Press

Per dettagli sulla costruzione della misura di Lebesgue:

- N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Zanichelli (Liguori per edizioni precedenti)

17 dicembre 2025