

## **Laurea Triennale in Informatica**

### **Programma del corso di Analisi Matematica (A) – anno accademico 2019/2020**

**Prof.ssa Monica Lazzo**

#### **La retta reale e il piano cartesiano**

Campi totalmente ordinati. Insiemi separati; assioma di completezza. L'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$ ; gli insiemi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ . Rappresentazione geometrica. Retta reale e retta reale ampliata. Insiemi limitati e insiemi illimitati. Minimo e massimo. Estremo inferiore ed estremo superiore. Esistenza dell'estremo superiore di un insieme limitato superiormente\*. Conseguenze dell'esistenza dell'estremo superiore: illimitatezza di  $\mathbb{N}$ , proprietà di densità. Intervalli. Valore assoluto.

Cenni di geometria analitica: piano cartesiano; assi coordinati; rette e strisce parallele agli assi; semipiani; quadranti; circonferenze.

#### **Funzioni reali di variabile reale**

Dominio, immagine, controimmagine. Grafico di una funzione. Test delle rette verticali. Proprietà generali delle funzioni: simmetria, periodicità, monotonia, convessità, limitatezza. Estremi globali ed estremi locali. Operazioni con le funzioni. Composizione di funzioni. Simmetria e monotonia di funzioni ottenute a partire da funzioni simmetriche e monotone. Funzioni iniettive. Test delle rette orizzontali. Funzione inversa.

Trasformazioni di grafici: traslazioni, dilatazioni e compressioni, riflessioni, composizione con il valore assoluto; passaggio al reciproco, passaggio all'inversa funzionale.

Funzione costante; funzione identica; funzione opposto; funzione reciproco. Funzione valore assoluto; funzione segno. Funzione parte intera; funzione mantissa. Funzione affine. Funzione potenza a esponente naturale; funzioni polinomiali; funzioni razionali. Funzione radice; funzione potenza a esponente razionale; funzione potenza a esponente reale. Funzione esponenziale; funzione logaritmo. Funzione seno, coseno, tangente; funzione arcoseno, arcocoseno, arctangente. Funzione gaussiana. Funzione seno iperbolico; funzione coseno iperbolico.

#### **Successioni numeriche e loro limiti**

Successioni di numeri reali. Successioni definite per ricorrenza. Successioni limitate. Estremi di una successione. Successioni monotone. Proprietà vere definitivamente. Intorni in  $\mathbb{R}$ . Limite di una successione. Unicità del limite. Successioni infinitesime, convergenti, divergenti, regolari. Regolarità delle successioni monotone\*. Teorema di convergenza obbligata\*. Teorema di divergenza obbligata. Teorema di confronto\*. Teoremi di permanenza delle disuguaglianze e di permanenza del segno. Limiti e inversi. Limiti e operazioni algebriche. Forme di indecisione. Progressione geometrica.

Successioni trascurabili; notazione "o piccolo". Operazioni algebriche con "o piccolo". Successioni asintoticamente equivalenti. Operazioni algebriche con equivalenze asintotiche. Risoluzione di alcune forme di indecisione.

#### **Serie numeriche e serie di potenze**

Somme parziali. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Stima del resto e calcolo approssimato della somma di una serie. Condizione necessaria per la convergenza. Operazioni con le serie. Serie geometrica. Serie telescopiche. Serie armonica generalizzata. Serie a termini di segno costante. Criterio del confronto, del confronto asintotico, dell'integrale. Serie a termini di segni variabile. Convergenza assoluta. Serie condizionalmente convergenti. Criterio della radice\*. Criterio del rapporto. Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz. Serie armonica alternata.

Cenni sulle serie di potenze. Raggio di convergenza. Funzioni generatrici di ricorsioni lineari.

## **Continuità e limiti di funzioni**

Continuità in un punto e in un insieme. Punti di discontinuità. Carattere locale della continuità. Continuità e operazioni algebriche. Continuità e composizione funzionale. Continuità e inversione funzionale. Continuità delle funzioni elementari. Teorema degli zeri di Bolzano\*. Teorema dei valori intermedi\*. Teorema di Weierstrass.

Punti di accumulazione. Limiti di funzioni; limiti unilateri. Caratterizzazione della continuità mediante i limiti. Estensione ai limiti di funzioni dei risultati sui limiti di successioni. Limite di una funzione composta. Limiti significativi delle funzioni elementari. Asintoti al grafico di una funzione.

Funzioni trascurabili e funzioni asintoticamente equivalenti. Equivalenze asintotiche di alcune funzioni elementari. Confronto tra infiniti e tra infinitesimi; gerarchia degli infiniti. Applicazioni al calcolo di limiti.

## **Calcolo differenziale**

Rapporto incrementale. Derivata e derivabilità in un punto. Derivate e derivabilità unilaterale. Derivabilità in un insieme. Funzione derivata. Continuità delle funzioni derivabili. Retta tangente. Significato geometrico della derivata. Classificazione dei punti di non derivabilità. Derivabilità e operazioni algebriche. Derivabilità e composizione funzionale. Derivabilità e inversione funzionale. Derivate delle funzioni elementari. Derivata seconda e derivate successive.

Ricerca di estremi globali e locali. Teorema di Fermat\*. Teorema del valor medio di Lagrange. Criterio di monotonia. Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla. Test della derivata prima. Criterio di convessità\*. Regola di de l'Hôpital. Studio del grafico di una funzione. Risoluzione grafica e approssimata di equazioni algebriche e trascendenti.

## **Calcolo integrale**

Suddivisioni di un intervallo. Somme di Riemann di una funzione limitata. Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrale di Riemann. Classi di funzioni integrabili. Integrali e aree. Media integrale. Teorema della media integrale\*. Proprietà di monotonia, linearità, additività. Integrale definito.

Primitive di una funzione. Funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale\*. Formula fondamentale del calcolo integrale\*.

Ricerca di primitive. Integrali indefiniti immediati. Integrazione per scomposizione, per sostituzione, per parti; integrazione di alcune funzioni razionali.

Integrali impropri per funzioni illimitate o definite in intervalli illimitati. Criteri di integrabilità.

## **Polinomi e serie di Taylor**

Polinomio di Taylor. Polinomio di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula di Taylor con il resto di Peano. Applicazione allo studio di serie numeriche e al calcolo di limiti. Formula di Taylor con il resto di Lagrange. Serie di Taylor. Sviluppi in serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Approssimazione locale di funzioni non polinomiali. Cenni sulla integrazione approssimata.

*Gli argomenti sono raggruppati per attinenza. L'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso.*

*La dimostrazione dei risultati contrassegnati con \* è parte integrante del programma.*

Materiale didattico disponibile sulla piattaforma di e-learning del Dipartimento di Informatica.

### Testi consigliati

G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di analisi matematica 1, Zanichelli

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1, Zanichelli

M. Conti, D.L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica Volume 1, Apogeo