

Laurea Triennale in Informatica

Corso di Analisi Matematica (A) – anno accademico 2018/2019

Prof.ssa Monica Lazzo

Programma del corso

La retta reale e il piano cartesiano

Campi totalmente ordinati. Insiemi separati; assioma di completezza. L'insieme dei numeri reali \mathbb{R} ; gli insiemi \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . Rappresentazione geometrica. Retta reale e retta reale ampliata. Intervalli. Valore assoluto. Insiemi limitati e insiemi illimitati. Minimo e massimo. Estremo inferiore ed estremo superiore. Esistenza dell'estremo superiore di un insieme limitato superiormente*. Proprietà di densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Cenni di geometria analitica: piano cartesiano; assi coordinati; rette e strisce parallele agli assi; semipiani; quadranti; circonferenze.

Funzioni reali di variabile reale

Dominio, immagine, controimmagine. Grafico di una funzione. Test delle rette verticali. Proprietà generali delle funzioni: simmetria, periodicità, monotonia, convessità, limitatezza. Estremi globali ed estremi locali. Operazioni con le funzioni. Composizione di funzioni. Simmetria e monotonia di funzioni ottenute a partire da funzioni simmetriche e monotone. Funzioni invertibili. Test delle rette orizzontali.

Trasformazioni di grafici: traslazioni, dilatazioni e compressioni, riflessioni, composizione con il valore assoluto; passaggio al reciproco, passaggio all'inversa funzionale.

Funzione costante; funzione identica; funzione opposto; funzione reciproco. Funzione valore assoluto; funzione segno. Funzione parte intera; funzione mantissa. Funzione affine. Funzione potenza a esponente naturale; funzioni polinomiali; funzioni razionali. Funzione radice; funzione potenza a esponente razionale; funzione potenza a esponente reale. Funzione esponenziale; funzione logaritmo. Funzione seno, coseno, tangente; funzione arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Funzione gaussiana. Funzione seno iperbolico; funzione coseno iperbolico.

Successioni numeriche e loro limiti

Successioni di numeri reali. Successioni definite per ricorrenza. Successioni limitate. Successioni monotone. Proprietà vere definitivamente. Limite di una successione. Unicità del limite. Successioni infinitesime. Successioni convergenti. Successioni divergenti. Successioni regolari. Regolarità delle successioni monotone*. Teorema di confronto. Teoremi di permanenza delle diseguaglianze e di permanenza del segno. Teorema di convergenza obbligata*. Teorema di divergenza obbligata. Limiti e inversi. Limiti e operazioni algebriche. Forme di indecisione. Progressione geometrica.

Successioni trascurabili; notazione “o piccolo”. Operazioni algebriche con “o piccolo”. Successioni asintoticamente equivalenti. Operazioni algebriche con equivalenze asintotiche. Risoluzione di alcune forme di indecisione.

Serie numeriche e serie di potenze

Somme parziali. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Condizione necessaria per la convergenza. Serie telescopiche. Serie geometrica. Serie armonica generalizzata. Stima del resto e calcolo approssimato della somma di una serie. Serie a termini positivi. Criterio del confronto, del confronto asintotico, dell'integrale. Convergenza assoluta. Serie condizionalmente convergenti. Criterio della radice*. Criterio del rapporto. Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz. Serie armonica alternata. Cenni sulle serie di potenze. Raggio di convergenza. Funzioni generatrici di ricorrenze lineari.

Continuità e limiti di funzioni

Continuità in un punto e in un insieme. Punti di discontinuità. Caratterizzazione della continuità mediante gli intorni. Continuità e operazioni algebriche. Continuità e composizione funzionale. Continuità e inversione funzionale. Continuità delle funzioni elementari. Teorema degli zeri di Bolzano*. Teorema dei valori intermedi. Teorema di Weierstrass.

Punti di accumulazione. Limiti di funzioni; limiti unilateri. Caratterizzazione della continuità mediante i limiti. Limite di una funzione composta. Limiti agli estremi del dominio delle funzioni elementari. Asintoti al grafico di una funzione. Estensione ai limiti di funzioni dei risultati sui limiti di successioni. Confronto tra infiniti e tra infinitesimi. Gerarchia degli infiniti. Applicazioni al calcolo di limiti.

Calcolo differenziale

Rapporto incrementale. Derivata; derivate unilate. Funzioni derivabili. Funzione derivata. Continuità delle funzioni derivabili. Retta tangente. Significato geometrico della derivata. Classificazione dei punti di non derivabilità. Derivabilità e operazioni algebriche. Derivabilità e composizione funzionale. Derivabilità e inversione funzionale. Derivate delle funzioni elementari. Derivata seconda e derivate successive.

Regola di de l'Hôpital. Teorema del valor medio di Lagrange. Criterio di monotonia. Ricerca di estremi globali e locali. Teorema di Fermat*. Test della derivata prima. Studio del grafico di una funzione. Risoluzione grafica e approssimata di equazioni algebriche e trascendenti.

Polinomio di Taylor. Polinomio di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula di Taylor con il resto di Peano e con il resto di Lagrange. Applicazioni delle formule di Taylor: risoluzione di forme di indecisione, criterio di convessità. Serie di Taylor. Sviluppi in serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Approssimazione locale di funzioni non polinomiali.

Calcolo integrale

Suddivisioni di un intervallo. Somme di Riemann di una funzione limitata. Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrale di Riemann. Classi di funzioni integrabili. Integrali e aree. Media integrale. Proprietà di monotonia, linearità, additività. Integrale definito. Funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale*. Formula fondamentale del calcolo integrale*.

Ricerca di primitive. Integrali indefiniti immediati. Integrazione per scomposizione, per sostituzione, per parti; integrazione di alcune funzioni razionali.

Cenni sulla integrazione approssimata mediante serie di Taylor. Cenni sugli integrali impropri; criteri di integrabilità.

Gli argomenti sono raggruppati per attinenza. L'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso.

*La dimostrazione dei risultati contrassegnati con * è parte integrante del programma.*

Materiale didattico

I "lucidi" proiettati in aula durante le lezioni sono disponibili sulla piattaforma di e-learning del Dipartimento di Informatica.

Testi consigliati

G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di analisi matematica 1, Zanichelli

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1, Zanichelli

M. Conti, D.L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica Volume 1, Apogeo

Modalità di svolgimento dell'esame

Struttura, durata e valutazione

L'esame consiste in una prova scritta, della durata di 75 minuti, che verte sul programma svolto nell'anno accademico di riferimento dell'appello in cui l'esame viene sostenuto.

La prova è composta da quattro parti, denominate A, B, C e D, che comprendono i seguenti quesiti:

A1: si chiede di dare alcune definizioni, tra tutte quelle presenti in programma, e di illustrarle con esempi; punteggio massimo: 6/30

A2: si chiede di studiare il carattere di una serie numerica, enunciando il criterio utilizzato; punteggio massimo: 6/30

B1: si chiede di risolvere un esercizio (a titolo esemplificativo e non esaustivo: determinazione degli intervalli di monotonia di una funzione, determinazione di asintoti, determinazione del polinomio di Taylor di una funzione, calcolo di una media integrale, calcolo di un integrale improprio, ...); punteggio massimo: 6/30

B2: si chiede di tracciare i grafici di alcune funzioni ottenute a partire dai grafici delle funzioni elementari attraverso semplici operazioni (traslazioni, riscalamenti, riflessioni,); punteggio massimo: 3/30

C1: si chiede di enunciare uno dei teoremi presenti nel programma definitivo; punteggio massimo: 3/30

C2: si chiede di enunciare uno dei teoremi contrassegnati con * nel programma definitivo; punteggio massimo: 3/30

D1: si chiede di dimostrare il teorema enunciato in C2; punteggio massimo: 3/30

Per superare la prova occorre conseguire un punteggio complessivo non inferiore a 18/30, con le seguenti condizioni:

- il punteggio conseguito nella parte A deve essere non inferiore a 8/30;
- il punteggio conseguito nella parte B deve essere non inferiore a 6/30;
- se il punteggio conseguito nel quesito C2 è inferiore a 2/30, il punteggio relativo alla parte D non viene conteggiato.

Informazioni pratiche

È necessario iscriversi all'esame attraverso il portale Esse3. Le iscrizioni si aprono dieci giorni prima, e si chiudono tre giorni prima, della data di inizio dell'appello.

L'appello si articola su più turni, le cui date vengono rese note entro la settimana precedente l'apertura delle iscrizioni. Al momento dell'iscrizione lo studente sceglie il turno in cui desidera essere inserito, sino a esaurimento dei posti disponibili per ciascun turno. Se necessario, in base al numero di iscrizioni, vengono aggiunti ulteriori turni.

In ciascun turno gli studenti presenti possono essere suddivisi in gruppi. La prova viene sostenuta da un gruppo alla volta. Per sostenere la prova è necessario esibire un documento di identità.

I risultati delle prove vengono pubblicati sulla piattaforma Esse3, in genere entro 24 ore dal termine di ciascun turno. Gli studenti hanno cinque giorni di tempo, a partire dal giorno della pubblicazione, per accettare il punteggio conseguito. Se la prova non è superata, allo studente viene attribuito l'esito "ritirato"; in questo modo rimane traccia dell'esame ai fini statistici, senza alcuna conseguenza sulla carriera dello studente; la prova deve essere interamente ripetuta in un appello successivo.