

Laurea Triennale in Informatica

Corso di Analisi Matematica (A) – anno accademico 2017/2018

Prof.ssa Monica Lazzo

Programma del corso

La retta reale e il piano cartesiano

Campi totalmente ordinati. Assioma di completezza. L'insieme dei numeri reali \mathbb{R} ; gli insiemi \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . Rappresentazione geometrica. Retta reale e retta reale ampliata. Intervalli. Valore assoluto. Insiemi limitati e insiemi illimitati. Minimo e massimo. Estremo inferiore ed estremo superiore. Esistenza dell'estremo superiore di un insieme limitato superiormente*. Proprietà di densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} .

Cenni di geometria analitica: piano cartesiano; assi coordinati; rette e strisce parallele agli assi; semipiani; quadranti; circonferenze.

Funzioni reali di variabile reale

Dominio, immagine, controimmagine. Grafico di una funzione. Test delle rette verticali. Proprietà generali delle funzioni: simmetria, periodicità, monotonia, convessità, limitatezza. Estremi globali ed estremi locali. Operazioni con le funzioni. Composizione di funzioni. Simmetria e monotonia di funzioni ottenute a partire da funzioni simmetriche e monotone. Funzioni invertibili. Test delle rette orizzontali.

Trasformazioni di grafici: traslazioni, dilatazioni e compressioni, riflessioni, composizione con il valore assoluto, passaggio al reciproco, passaggio all'inversa funzionale.

Funzione costante; funzione identica; funzione opposto; funzione reciproco. Funzione valore assoluto; funzione segno. Funzione parte intera; funzione mantissa. Funzione potenza a esponente naturale; funzioni polinomiali; funzioni razionali. Funzione radice; funzione potenza a esponente razionale; funzione potenza a esponente reale. Funzione esponenziale; funzione logaritmo. Funzione seno, coseno, tangente; funzione arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Funzione gaussiana. Funzione seno iperbolico, coseno iperbolico.

Successioni numeriche e loro limiti

Successioni di numeri reali. Successioni definite per ricorrenza. Successioni limitate. Successioni monotone. Proprietà vere definitivamente. Successioni infinitesime. Successioni convergenti; unicità del limite. Successioni divergenti. Successioni regolari. Regolarità delle successioni monotone*. Teorema di confronto*. Teoremi di permanenza delle diseguaglianze e di permanenza del segno. Teorema di convergenza obbligata*. Teorema di divergenza obbligata. Limiti e inversi. Limiti e operazioni algebriche. Progressione geometrica.

Continuità e limiti di funzioni

Continuità in un punto e in un insieme. Punti di discontinuità. Caratterizzazione della continuità mediante gli intorni. Continuità e operazioni algebriche. Continuità e composizione funzionale. Continuità e inversione funzionale. Continuità delle funzioni elementari. Teorema degli zeri di Bolzano*. Teorema dei valori intermedi. Teorema di Weierstrass.

Punti di accumulazione. Limiti di funzioni; limiti unilateri. Caratterizzazione della continuità mediante i limiti. Estensione ai limiti di funzioni dei risultati sui limiti di successioni. Limite di una funzione composta. Limiti agli estremi del dominio delle funzioni elementari. Asintoti al grafico di una funzione.

Funzioni asintoticamente equivalenti. Proprietà della equivalenza asintotica. Funzioni trascurabili. Confronto tra infiniti e tra infinitesimi. Gerarchia degli infiniti. Applicazioni al calcolo di limiti.

Calcolo differenziale

Rapporto incrementale. Derivata; derivate unilate. Funzioni derivabili. Funzione derivata. Continuità delle funzioni derivabili. Retta tangente. Significato geometrico della derivata. Classificazione dei punti di non derivabilità. Derivabilità e operazioni algebriche. Derivabilità e composizione funzionale. Derivabilità e inversione funzionale. Derivate delle funzioni elementari. Derivata seconda e derivate successive. Ricerca di estremi globali e locali. Teorema di Fermat*. Teorema del valor medio di Lagrange*. Conseguenze del teorema di Lagrange: derivata in un punto e limite della funzione derivata; regola di de l'Hôpital; criterio di monotonia. Test della derivata prima. Studio del grafico di una funzione. Risoluzione grafica e approssimata di equazioni algebriche e trascendenti.

Calcolo integrale

Suddivisioni di un intervallo. Somme di Riemann di una funzione limitata. Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrale di Riemann. Classi di funzioni integrabili. Integrali e aree. Media integrale. Proprietà di monotonia, linearità, additività. Integrale definito. Funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale*. Formula fondamentale del calcolo integrale*. Ricerca di primitive. Integrali indefiniti immediati. Integrazione per scomposizione, per sostituzione, per parti; integrazione di alcune funzioni razionali. Cenni sugli integrali impropri; criteri di integrabilità.

Serie numeriche e serie di potenze

Somme parziali. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Condizione necessaria per la convergenza. Serie telescopiche. Serie geometrica. Serie armonica generalizzata. Stima del resto e calcolo approssimato della somma di una serie. Serie a termini positivi. Criterio del confronto, del confronto asintotico, dell'integrale. Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz. Serie armonica alternata. Convergenza assoluta. Serie condizionalmente convergenti. Criterio della radice*. Criterio del rapporto. Cenni sulle serie di potenze. Intervallo di convergenza. Integrazione termine a termine.

Polinomi e serie di Taylor

Polinomio di Taylor. Polinomi di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula di Taylor con il resto di Peano e con il resto di Lagrange. Applicazioni delle formule di Taylor: risoluzione di forme di indecisione, approssimazione locale di funzioni, criterio di convessità. Serie di Taylor. Sviluppabilità in serie di alcune funzioni elementari. Applicazioni degli sviluppi in serie di Taylor: approssimazione locale di funzioni, integrazione approssimata.

Gli argomenti sono raggruppati per attinenza. L'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso.

*La dimostrazione dei risultati contrassegnati con * è parte integrante del programma.*

Materiale didattico

I "lucidi" proiettati in aula durante le lezioni sono disponibili sulla piattaforma di e-learning del Dipartimento di Informatica.

Testi consigliati

G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di analisi matematica 1, Zanichelli

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1, Zanichelli

M. Conti, D.L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica Volume 1, Apogeo

Modalità di svolgimento dell'esame

Struttura, durata e valutazione

L'esame consiste in una prova orale che verte sul programma svolto nell'anno accademico di riferimento dell'appello in cui l'esame viene sostenuto.

La prova è composta da tre parti:

- A. presentazione di definizioni e risultati teorici, con esempi illustrativi;
- B. risoluzione di un esercizio;
- C. presentazione di un teorema con relativa dimostrazione.

L'argomento da presentare nella parte A viene sorteggiato tra tutti gli argomenti in programma. L'esercizio da risolvere nella parte B riguarda un argomento non discusso nella parte A. Il teorema da presentare nella parte C viene selezionato tra quelli contrassegnati con * nel programma.

Nell'ambito delle presentazioni delle parti A e C è richiesto di definire esplicitamente i termini che compaiono negli enunciati; giustificare le affermazioni relative agli esempi; giustificare i passaggi compiuti nelle dimostrazioni, citando esplicitamente i risultati applicati. Nell'ambito della risoluzione dell'esercizio della parte B è richiesto di esplicitare i passaggi intermedi e giustificare i risultati ottenuti.

A ciascuna parte vengono in genere dedicati 10 minuti.

A ciascuna parte è attribuito un punteggio compreso tra 0 e 10; la somma dei tre punteggi determina il voto finale. La prova si ritiene superata se il voto finale è non inferiore a 18 punti; in caso contrario, la prova deve essere interamente ripetuta in un appello successivo.

Informazioni pratiche

È necessario iscriversi all'esame attraverso il portale Esse3. Le iscrizioni si aprono dieci giorni prima, e si chiudono tre giorni prima, della data di inizio dell'appello.

L'appello si articola su più turni, le cui date vengono rese note entro la settimana precedente l'apertura delle iscrizioni. Al momento dell'iscrizione lo studente sceglie il turno in cui desidera essere inserito, sino a esaurimento dei posti disponibili per ciascun turno. Se necessario, in base al numero di iscrizioni, vengono aggiunti ulteriori turni.

Per sostenere l'esame è necessario esibire un documento di identità.