Corso di Laurea Triennale in Fisica

Svolgimento di alcuni quesiti assegnati nelle prove scritte di Analisi Matematica III nell'a.a. 2017/18

Nota: lo svolgimento proposto per ciascun quesito non è l'unico possibile e ha valore indicativo. Coloro che desiderano segnalare imprecisioni o proporre miglioramenti possono farlo scrivendo a monica.lazzo@uniba.it.

Prova scritta del 14 novembre 2017 (prima prova di esonero) – quesito 1

Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) = \dfrac{(x^2-n)^2}{n^2+x^4}$.

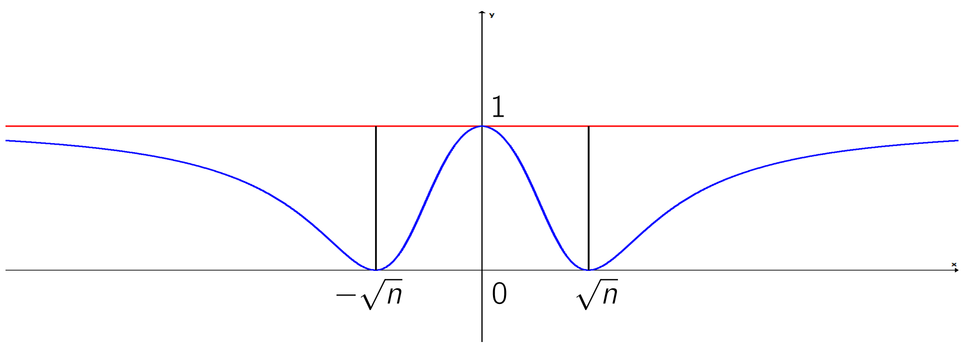
(a) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}$.

(b) Se è lecito, si applichi il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx$.

Svolgimento

(a) Fissato $x \in \mathbb{R}$, per $n \to +\infty$ risulta $f_n(x) \sim \dfrac{n^2}{n^2}$, quindi $f_n(x) \to 1$. Pertanto, la successione assegnata converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione f di costante valore 1.

Per stabilire se la convergenza è uniforme, devo determinare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|$. Fissato $n \in \mathbb{N}^*$, è facile stabilire che f_n ha l'andamento rappresentato in blu nella figura qui sotto, nella quale la retta orizzontale in rosso è il grafico di f:



Ne deduco immediatamente che la quantità $|f_n(x)-f(x)|$ è massima in corrispondenza di $x = -\sqrt{n}$ e $x = \sqrt{n}$ e quindi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| = 1 - f_n(\pm\sqrt{n}) = 1.$$

Ne segue $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| = 1 \neq 0$, pertanto $\{f_n\}$ non converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$.

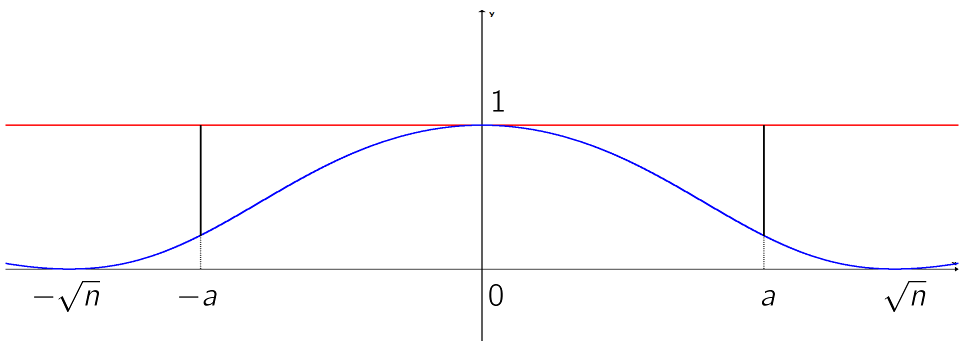
Osservo che $x = -\sqrt{n}$ e $x = \sqrt{n}$, i punti in cui la quantità $|f_n(x)-f(x)|$ è massima, tendono a $-\infty$ e $+\infty$, rispettivamente, per $n \to +\infty$. Verifico se $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in insiemi che, almeno definitivamente, non contengano tali punti, ossia in intervalli limitati. Per semplicità, mi limito a considerare intervalli simmetrici rispetto a 0.

Fissato $a \in (0,+\infty)$, definitivamente risulta $\sqrt{n} > a$ e quindi, limitatamente al variare di x in $[-a,a]$, la quantità $|f_n(x)-f(x)|$ è massima in corrispondenza di $x = -a$ e $x = a$. (Ciò si deduce immediatamente dalla figura qui sotto.) Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \big(1 - f_n(\pm a)\big) = 0\,;$$

l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\{f_n\}$ converge puntualmente a f in $\mathbb{R}$, e quindi anche in $-a$ e a.

In conclusione, $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in $[-a,a]$, per ogni $a \in (0,+\infty)$, e di conseguenza in un qualsiasi intervallo compatto di $\mathbb{R}$.



(b) È lecito applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per calcolare il limite proposto, in quanto $\{f_n\}$ converge uniformemente nell'intervallo $[0,2]$. Ricordando che la funzione limite è la funzione costante di valore 1, ottengo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx = 2\,.$$

Prova scritta del 14 novembre 2017 (prima prova di esonero) – quesito 2

Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$(-1)^n \, \frac{(n+x)\, e^{n\,(1-x)}}{n^2+1} \qquad\qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}).$$

Svolgimento

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, pongo $g_n(x) := \dfrac{(n+x)\, e^{n\,(1-x)}}{n^2+1}$ e $f_n(x) := (-1)^n\, g_n(x)$. Osservo che

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|n+x|\, e^{n\,(1-x)}}{n^2+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x < 1, \\ 0 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Ne deduco che la serie di termine f_n non converge (in alcun senso) in $(-\infty, 1)$.

Fisso $x \in [1, +\infty)$. Osservo che $g_n(x) \geq 0$ per ogni n, quindi la successione $\{f_n(x)\}$ è a termini alterni. So già che $\{g_n(x)\}$ è infinitesima. Osservo che la successione

$$\left\{ \frac{n+x}{n^2+1} \right\}$$

è decrescente (almeno per $n \geq 1$) perché la derivata della funzione

$$t \in [1, +\infty) \mapsto \frac{t+x}{t^2+1}$$

è la funzione

$$t \in [1, +\infty) \mapsto \frac{1-t^2-2xt}{(t^2+1)^2},$$

che è negativa. La successione $\left\{ e^{n\,(1-x)} \right\}$ è costante se $1-x=0$ e strettamente decrescente se $1-x<0$. Essendo prodotto di due successioni positive e decrescenti, anche $\{g_n(x)\}$ lo è.

Riassumendo, per ogni $x \in [1, +\infty)$ la successione $\{f_n(x)\}$ soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz. Ne deduco che per ogni $x \in [1, +\infty)$ la serie di termine $f_n(x)$ converge. Inoltre, in base a note considerazioni sulla stima del resto prevista dallo stesso criterio, so che la serie di termine f_n converge uniformemente in $[1, +\infty)$ se e solo se nello stesso intervallo la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione identicamente nulla. Verifico se quest'ultima condizione è verificata. Fissato n, osservo che $|f_n| = g_n$ e che

$$g_n'(x) = \frac{e^{n(x-1)}}{n^2+1}\,(1-n^2-nx);$$

per $n \geq 1$, la quantità in parentesi è negativa per ogni $x \in [1, +\infty)$, perciò la funzione g_n è decrescente in $[1, +\infty)$. Pertanto:

$$\sup_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[1,+\infty)} g_n(x) = g_n(1) \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Dato che $\{g_n(1)\}$ è infinitesima, deduco che $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[1,+\infty)$ alla funzione identicamente nulla, e quindi, come osservato sopra, la serie di termine f_n converge uniformemente in $[1,+\infty)$.

Restano da esaminare la convergenza assoluta e totale. Dato che $|f_n(1)| = g_n(1) = \dfrac{n+1}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n}$, la serie non converge assolutamente per $x = 1$. Per $x \in (1,+\infty)$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+x)\, e^{n\,(1-x)}}{n^2+1}} = e^{1-x} < 1\,,$$

quindi la serie converge assolutamente, per il criterio della radice.

Non convergendo assolutamente in $x = 1$, la serie assegnata non può convergere totalmente in alcun insieme che contenga $x = 1$. Siccome ciascuna f_n è continua nell'intervallo chiuso $[1,+\infty)$, risulta $\sup\limits_{x\in(1,+\infty)} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x)|$, e perciò la serie assegnata non può convergere totalmente nell'intervallo aperto $(1,+\infty)$. Tuttavia, fissato $a \in (1,+\infty)$, risulta

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x)| = |f_n(a)| \quad \text{per ogni } n \geq 1\,,$$

e la serie di termine $|f_n(a)|$ converge, per quanto detto sulla convergenza assoluta. In conclusione, la serie di termine f_n converge totalmente in $[a,+\infty)$, per qualsiasi $a \in (1,+\infty)$.

Prova scritta del 5 febbraio 2018 – quesito 1

Si utilizzi, giustificandone la applicabilità, il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-2}^{1}\frac{n\,e^{-x^2/n}}{n+1}\,dx.$$

Svolgimento

Posto $f_n(x) := \dfrac{n\,e^{-x^2/n}}{n+1}$ per $x\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}^*$, per poter applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale devo verificare che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente nell'intervallo $[-2,1]$ e determinarne la funzione limite.

Fissato $x\in\mathbb{R}$, risulta $f_n(x)\to 1$ per $n\to+\infty$. Pertanto, $\{f_n\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione costante di valore 1. Per stabilire se $\{f_n\}$ converge uniformemente, devo determinare $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[-2,1]}|f_n(x)-1|$.

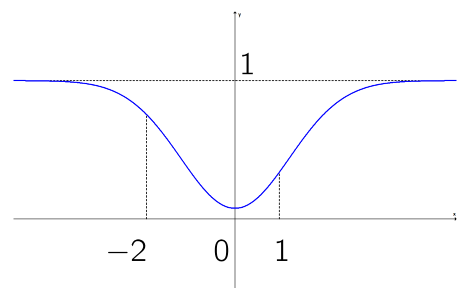
Fissato $n\in\mathbb{N}^*$, è facile stabilire che la funzione $x\mapsto|f_n(x)-1|$ ha l'andamento rappresentato nella figura qui a lato. Ne deduco che

$\sup\limits_{x\in[-2,1]}|f_n(x)-1| = |f_n(-2)-1|$;

passando al limite ottengo

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[-2,1]}|f_n(x)-1| = \lim_{n\to+\infty}|f_n(-2)-1| = 0\,,$$

quindi $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[-2,1]$ alla funzione costante di valore 1.



Posso allora applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale e ottenere

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-2}^{1}\frac{n\,e^{-x^2/n}}{n+1}\,dx = \int_{-2}^{1}1\,dx = 3\,.$$

Anche se non è necessario per lo svolgimento del quesito, per completezza osservo che $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione costante di valore 1 in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Infatti, fissati $a,b\in\mathbb{R}$, risulta $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-1| = \max\{|f_n(a)-1|,|f_n(b)-1|\}$, ed entrambe le successioni nelle parentesi sono infinitesime per $n\to+\infty$. Invece, $\{f_n\}$ non converge uniformemente in $\mathbb{R}$, in quanto, per ogni n,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-1| = \lim_{x\to\pm\infty}|f_n(x)-1| = 1\,.$$

Prova scritta del 5 febbraio 2018 – quesito 2

Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{x^n (x^2-3)^n}{(3^n+2)\, n} \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*).$$

Svolgimento

Considero la serie di potenze "ausiliaria" di coefficienti $c_n = \dfrac{1}{(3^n+2)\, n}$ e centro $t_0 = 0$. Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(3^n+2)\, n}{(3^{n+1}+2)\,(n+1)} = \frac{1}{3}\,,$$

la serie ausiliaria ha raggio di convergenza $R = 3$. Per $t = 3$ ottengo la serie di termine $\dfrac{3^n}{(3^n+2)\, n}$; dato che

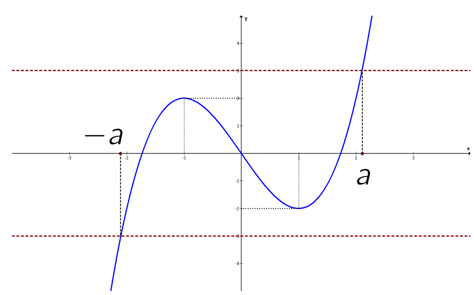
$$\frac{3^n}{(3^n+2)\, n} \sim \frac{1}{n}\,, \tag{1}$$

la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica. Per $t = -3$ ottengo la serie di termine $(-1)^n\, b_n$, con $b_n := \dfrac{3^n}{(3^n+2)\, n}$. Da (1) deduco che $\{b_n\}$ è infinitesima; inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_{n+1} \le b_n \quad\Longleftrightarrow\quad 3\,(3^n+2)\, n \le (3^{n+1}+2)\,(n+1) \quad\Longleftrightarrow\quad 4\,n - 2 \le 3^{n+1}\,,$$

e riconosco facilmente (per esempio, confrontando i grafici delle funzioni $x \mapsto 4\,x-2$ e $x \mapsto 3^{x+1}$) che l'ultima disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Per il criterio di Leibniz, deduco che la serie ausiliaria converge per $t = -3$. In conclusione, la serie ausiliaria converge puntualmente in $[-3, 3)$, assolutamente in $(-3, 3)$, uniformemente in $[-3, \rho]$ e totalmente in $[-\rho, \rho]$, per qualsiasi $\rho \in (0, 3)$.

Per descrivere la convergenza della serie assegnata, devo determinare per quali valori di x il prodotto $x\,(x^2-3)$ appartiene agli intervalli indicati sopra. Posto $g(x) = x\,(x^2-3)$, per $x \in \mathbb{R}$, considero il grafico della funzione g, riportato qui a lato.



Detta a l'unica soluzione dell'equazione $g(x) = 3$, ne deduco che la serie assegnata converge puntualmente per $x \in [-a, a)$, assolutamente per $x \in (-a, a)$, uniformemente per $x \in [-3, b]$, con $b \in (0, a)$, e totalmente per $x \in [-b.b]$, con $b \in (0, a)$.

Prova scritta del 5 febbraio 2018 – quesito 3

Si consideri l'equazione differenziale $x' = -\dfrac{6}{t}\,x - 2\,t^2\,x^{3/2} \quad (\text{con } x = x(t))$.

(a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

(b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

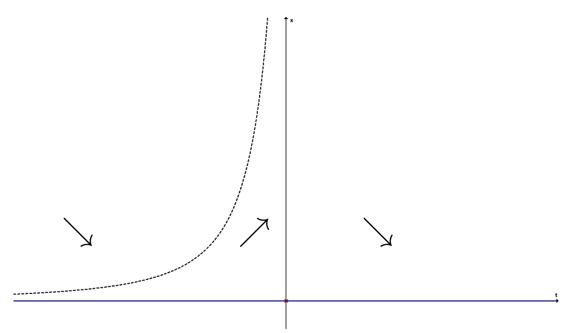
(c) Si determini esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(t_0) = 4$, con $t_0 \in \{-1, 1\}$, specificandone l'intervallo di esistenza e descrivendone il comportamento agli estremi di tale intervallo.

(d) Si tracci il grafico delle soluzioni determinate al punto precedente.

Svolgimento

Posto $f(t,x) := -\dfrac{6}{t}\,x - 2\,t^2\,x^{3/2}$, la funzione f è definita nell'insieme (non aperto) $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+$, in cui risulta di classe C^1; almeno per le soluzioni dei problemi di Cauchy con condizioni iniziali in $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$ è garantita l'esistenza e unicità locale. Il teorema di esistenza globale non è applicabile perché il dominio di f non è del tipo $I \times \mathbb{R}$, con I intervallo.

Osservo che $f(t,x) = -\dfrac{2\,x}{t}\,(3 + t^3\,x^{1/2})$. Ne deduco che le restrizioni della funzione costante di valore 0 agli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ sono soluzioni di equilibrio. L'equazione $3 + t^3\,x^{1/2} = 0$ è soddisfatta per $x = 9/t^6$, con $t < 0$; ottengo quindi una zero-clina. Dal segno di f deduco che le soluzioni hanno la monotonia indicata nella figura qui a lato.



Suppongo che φ sia una soluzione definita in $(a, +\infty)$, con $a \in (0, +\infty)$. Per la monotonia, φ ha limite $\alpha \in [0, +\infty)$ per $t \to +\infty$. Se suppongo $\alpha \neq 0$, passando al limite per $t \to +\infty$ nell'uguaglianza $\varphi'(t) = -\dfrac{6}{t}\,\varphi(t) - 2\,t^2\,\varphi(t)^{3/2}$, valida per ogni $t \in (a, +\infty)$, ottengo $\varphi'(t) \to -\infty$, in contrasto con il teorema dell'asintoto orizzontale. Ne deduco che i grafici di tutte le (eventuali) soluzioni definite in intervalli illimitati superiormente hanno $x = 0$ come asintoto orizzontale. I grafici delle (eventuali) soluzioni definite in intervalli illimitati inferiormente, invece, non hanno asintoti orizzontali. Infatti, una tale soluzione dovrebbe, per la monotonia, avere per $t \to -\infty$ un limite $\beta \in (0, +\infty]$; se fosse $\beta \in (0, +\infty)$, ragionando come sopra avrei una contraddizione.

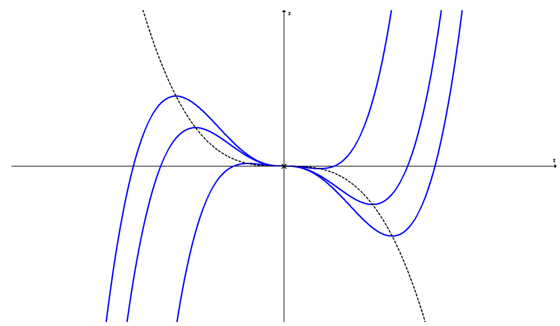
L'equazione assegnata è di Bernoulli. Moltiplicandone ambo i membri per $-\dfrac{1}{2}\,x^{-3/2}$ ottengo $-\dfrac{1}{2}\,x^{-3/2}\,x' = \dfrac{3}{t}\,x^{-1/2} + t^2$; posto $z(t) = x(t)^{-1/2}$, la funzione z risolve l'equazione lineare del primo ordine $z' = \dfrac{3}{t}\,z + t^2$, il cui integrale generale è

$$\begin{aligned} e^{3\ln|t|} \int e^{-3\ln|t|}\, t^2\, dt &= |t|^3 \int \frac{1}{|t|^3}\, t^2\, dt = |t|^3 \int \frac{1}{|t|}\, dt \\ &= |t|^3 \int \operatorname{sign}(t)\, \frac{1}{t}\, dt = |t|^3 \operatorname{sign}(t) \int \frac{1}{t}\, dt = t^3\, (\ln|t| + c)\ , \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Per qualsiasi $c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$z_c(t) = t^3\, (\ln|t| + c) \qquad (1)$$

è definita in $\mathbb{R}^*$ e ha l'andamento rappresentato nella figura qui a lato. A ciascuna di queste funzioni corrispondono due soluzioni dell'equazione assegnata, entrambe definite dalla uguaglianza $x_c(t) = (z_c(t))^{-2}$, i cui rispettivi intervalli di esistenza sono



$$\{t \in (-\infty, 0) \,|\, z_c(t) > 0\} = (-e^{-c}, 0)\,, \quad \{t \in (0, +\infty, 0) \,|\, z_c(t) > 0\} = (e^{-c}, +\infty)\,.$$

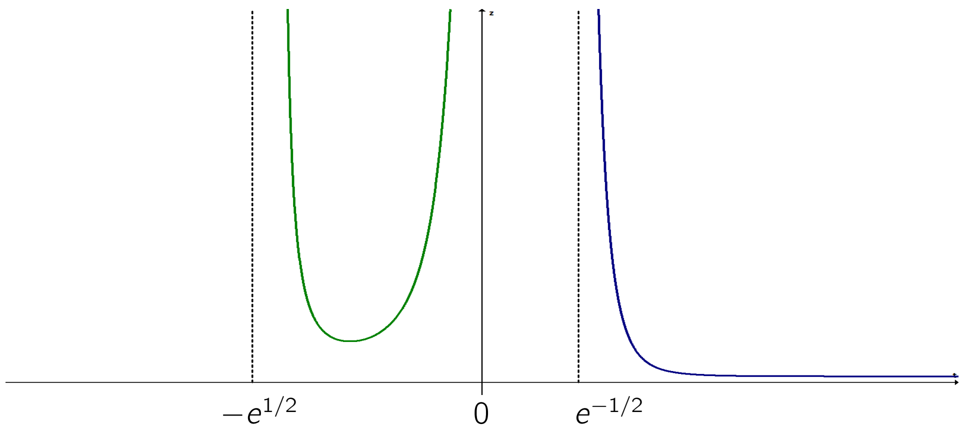
La condizione iniziale $x(1) = 4$ corrisponde a $z(1) = 1/2$; sostituendo in (1) ottengo $c = 1/2$ e quindi la soluzione

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^6 \left(\ln(t) + \dfrac{1}{2}\right)^2}\,, \qquad t \in (e^{-1/2}, +\infty)\,;$$

osservo che φ diverge positivamente per $t \to e^{-1/2}$ e, come previsto, tende a 0 per $t \to +\infty$. La condizione iniziale $x(-1) = 4$ corrisponde a $z(-1) = 1/2$; sostituendo in (1) ottengo $c = -1/2$ e quindi la soluzione

$$\psi(t) = \frac{1}{t^6 \left(\ln(-t) - \dfrac{1}{2}\right)^2}\,, \qquad t \in (-e^{1/2}, 0)\,;$$

osservo che ψ diverge positivamente in entrambi gli estremi dell'intervallo di esistenza.
Concludo osservando che entrambe le soluzioni trovate sono massimali. I loro grafici sono raffigurati nella pagina seguente (φ in blu, ψ in verde).



Prova scritta del 5 febbraio 2018 – quesito 4

Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = x - y + 2\,z, \quad y' = -11\,x + y + 2\,z, \quad z' = -x + y + z$$

con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni limitate per $t \to +\infty$.

Svolgimento

La matrice dei coefficienti del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -11 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per determinare gli autovalori di A scrivo il polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -11 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -11 & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -11 & 1-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) - 9 + 11\lambda - 20 - 2\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 8\lambda - 30.$$

Si vede facilmente che l'equazione $P(\lambda) = 0$ ha una soluzione reale $\lambda = -3$ e due soluzioni complesse coniugate $\lambda = 3 + i$ e $\lambda = 3 - i$.

Determino un autovettore per $\lambda = -3$ risolvendo il sistema

$$(A+3I)u = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -11 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il minore $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, che ha determinante $3 \neq 0$, considero il sistema

$$\begin{cases} 4\,u_1 - u_2 = -2\,u_3 \\ -u_1 + u_2 = -4\,u_3 \end{cases}$$

e ottengo

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2\,u_3 & -1 \\ -4\,u_3 & 1 \end{vmatrix}}{3} = -2\,u_3\,, \qquad u_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2\,u_3 \\ -1 & -4\,u_3 \end{vmatrix}}{3} = -6\,u_3\,;$$

scegliendo $u_3 = -1$ ottengo l'autovettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$; in corrispondenza ottengo la soluzione

$$\varphi_1(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determino un autovettore per $\lambda = 3 + i$ risolvendo il sistema

$$(A-(3+i)I)u = \begin{pmatrix} -2-i & -1 & 2 \\ -11 & -2-i & 2 \\ -1 & 1 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il minore $\begin{pmatrix} -2-i & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, che ha determinante $-(3+i) \neq 0$, considero il sistema

$$\begin{cases} (-2-i)\,w_1 - w_2 = -2\,w_3 \\ -w_1 + w_2 = (2+i)\,w_3 \end{cases}$$

e ottengo

$$w_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2\,w_3 & -1 \\ (2+i)\,w_3 & 1 \end{vmatrix}}{-(3+i)} = -\frac{1+3i}{10}\,w_3\,, \qquad w_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2-i & -2\,w_3 \\ -1 & (2+i)\,w_3 \end{vmatrix}}{-(3+i)} = \frac{19+7i}{10}\,w_3\,;$$

scegliendo $w_3 = 10$ ottengo l'autovettore complesso $\begin{pmatrix} -1-3i \\ 19+7i \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$;

in corrispondenza ottengo le soluzioni

$$\varphi_2(t) = e^{3t} \left[\cos(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right] , \ t \in \mathbb{R} ,$$

e

$$\varphi_3(t) = e^{3t} \left[\sin(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right] , t \in \mathbb{R} .$$

L'integrale generale del sistema assegnato è quindi

$$c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + c_3 \varphi_3(t) , t \in \mathbb{R} ,$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Le soluzioni limitate per $t \to +\infty$ sono tutte e sole quelle con $c_2 = c_3 = 0$.