Corso di Laurea Triennale in Fisica

Svolgimento di alcuni quesiti assegnati nelle prove scritte di Analisi Matematica III

Nota: lo svolgimento che propongo per i quesiti non è l'unico possibile e ha valore indicativo. Sarò grata a chi vorrà segnalare imprecisioni o proporre miglioramenti (scrivere a monica.lazzo@uniba.it).

Prova scritta del 29 gennaio 2016 – quesito 1

Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{x^{2n}+2}{x^{2n}+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}).$$

Svolgimento

La successione assegnata converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2) & |x| < 1, \\ \ln(3/2) & |x| = 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

Dato che ciascuna funzione f_n è continua in $\mathbb{R}$, mentre f ha discontinuità in $x = -1$ e $x = 1$, posso escludere che la convergenza sia uniforme in intorni di tali punti.

Fisso $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < 1 < b$, e verifico se $\{f_n\}$ converge uniformemente in

$$X_{a,b} := (-\infty, -b] \cup [-a, a] \cup [b, +\infty).$$

Osservo che

$$\sup_{x \in X_{a,b}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,a] \cup [b,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \max\left\{ \sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| \ , \sup_{x \in [b,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \right\};$$

la prima uguaglianza deriva dal fatto che sia f_n che f sono funzioni pari.

Osservando che $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^{2n}+1}\right)$ e che la funzione $x \mapsto x^{2n}$ è crescente in $[0, +\infty)$, deduco facilmente che f_n è decrescente sia in $[0, a]$ che in $[b, +\infty)$.

Pertanto la funzione $x \in [0, a] \mapsto f_n(x) - f(x) = f_n(x) - \ln(2)$ è decrescente; dato che in 0 assume il valore 0, è negativa in tutto l'intervallo considerato. Ne segue che la funzione $x \in [0, a] \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ è crescente, quindi

$$\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(a) - \ln(2)|.$$

Anche la funzione $x \in [b, +\infty) \mapsto f_n(x) - f(x) = f_n(x)$ è decrescente, inoltre è positiva. Quindi:

$$\sup_{x \in [b,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = f_n(b).$$

Pertanto:

$$\sup_{x \in X_{a,b}} |f_n(x) - f(x)| = \max\Big\{|f_n(a) - \ln(2)|\ , f_n(b)\Big\};$$

siccome le successioni numeriche $\{|f_n(a) - \ln(2)|\}$ e $\{f_n(b)\}$ sono entrambe infinitesime, ottengo

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X_{a,b}} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

quindi $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in $X_{a,b}$.

Prova scritta del 29 gennaio 2016 – quesito 3

Si consideri l'equazione differenziale $x' = (1-x^2)\sin(t)$ (con $x = x(t)$).

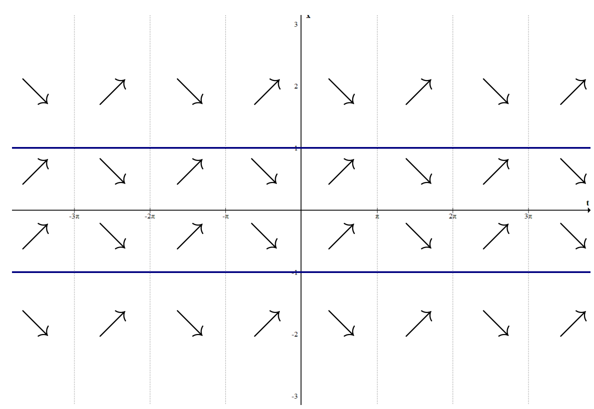
- Si discuta l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità locale.
- In base all'analisi del secondo membro dell'equazione si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni.
- Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si determini esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(0) = \alpha$, specificando l'intervallo di definizione.
- Si tracci il grafico di qualche soluzione qualitativamente rappresentativa; in particolare, si tracci il grafico delle soluzioni corrispondenti ad $\alpha \in \{2, 0, (1+e^2)/(1-e^2)\}$.

Svolgimento

Posto $f(t,x) := (1-x^2)\sin(t)$, si ha $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$; ciò basta a garantire l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy con arbitraria condizione iniziale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Osservo preliminarmente che l'equazione differenziale assegnata ammette le soluzioni di equilibrio $u(t) \equiv 1$ e $v(t) \equiv -1$. Qualsiasi altra soluzione assumerà nel proprio intervallo di esistenza solo valori strettamente maggiori di 1, oppure solo valori strettamente minori di -1, oppure solo valori strettamente compresi tra -1 e 1. Queste ultime soluzioni, essendo limitate, saranno globali, cioè definite in tutto $\mathbb{R}$. Per le soluzioni con grafico contenuto nel complementare della striscia delimitata dalle rette $x = -1$ e $x = 1$ non posso dire niente a priori. Infatti, crescendo come una potenza di esponente 2 rispetto a x, la funzione f non soddisfa la condizione di sublinearità; pertanto, non è detto che tutte le soluzioni massimali dell'equazione siano globali.

La funzione f si annulla anche per $t = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$; alcune delle zero-cline corrispondenti sono tratteggiate nella figura qui a lato. Dal segno di f deduco che le soluzioni hanno la monotonia indicata nella figura qui a lato.



L'equazione assegnata è a variabili separabili. La risolvo per separazione delle variabili, supponendo $x(t) \neq \pm 1$:

$$\frac{x'(t)}{1-x(t)^2} = \sin(t). \tag{1}$$

Integrando il primo membro dell'uguaglianza tra 0 e t ottengo

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{1-x(s)^2} ds = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{x'(s)}{1+x(s)} + \frac{x'(s)}{1-x(s)}\right) ds = \left[\, \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x(t)}{1-x(t)}\right| \,\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x(t)}{1-x(t)}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x(t)}{1-x(t)}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right).$$

Noto che nel penultimo passaggio ho imposto la condizione iniziale $x(0) = \alpha$ (in cui suppongo $\alpha \neq \pm 1$); nell'ultimo passaggio ho usato il fatto che, per quanto osservato sopra, $\dfrac{1+x(t)}{1-x(t)}$ ha segno costante in tutto l'intervallo di definizione della soluzione.
Integrando il secondo membro dell'uguaglianza (1) tra 0 e t ottengo

$$\int_0^t \sin(s)\,ds = 1 - \cos(t).$$

Uguagliando gli integrali ottengo

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x(t)}{1-x(t)}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) = 1 - \cos(t),$$

da cui

$$\frac{1+x(t)}{1-x(t)}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = e^{2(1-\cos(t))},$$

e quindi

$$x(t) = \frac{e^{2(1-\cos(t))} - \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}{e^{2(1-\cos(t))} + \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}\,, \tag{2}$$

che ha senso se e solo se

$$e^{2(1-\cos(t))} \neq \frac{\alpha-1}{1+\alpha}\,. \tag{3}$$

Osservo che $2(1-\cos(t)) \geq 0$ per ogni t, quindi $e^{2(1-\cos(t))} \geq 1$ per ogni t. Se $(\alpha-1)/(1+\alpha) < 1$, che equivale a $1+\alpha > 0$, la condizione (3) è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(0) = \alpha$ è globale sia per $\alpha \in (-1, 1)$ (come previsto in base alle osservazioni fatte in precedenza) che per $\alpha \in (1, +\infty)$.
Resta da considerare $\alpha \in (-\infty, -1)$. In questo caso risulta $(\alpha-1)/(1+\alpha) > 1$ e la condizione (3) è soddisfatta se e solo se

$$\cos(t) \neq 1 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha-1}{1+\alpha}\right) =: c_\alpha\,. \tag{4}$$

Osservo che $\cos(t) \in [-1, 1]$ per ogni t, e che $c_\alpha < 1$ per ogni t.
Se $c_\alpha < -1$, che equivale ad $\alpha > (1+e^4)/(1-e^4) =: \alpha^*$, la condizione (4) è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(0) = \alpha$ è globale anche per $\alpha \in \big(\alpha^*, -1\big)$.

Per $\alpha = \alpha^*$ si ha $c_{\alpha^*} = -1$; la condizione (4) è verificata per $t \neq (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(0) = \alpha$ è definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

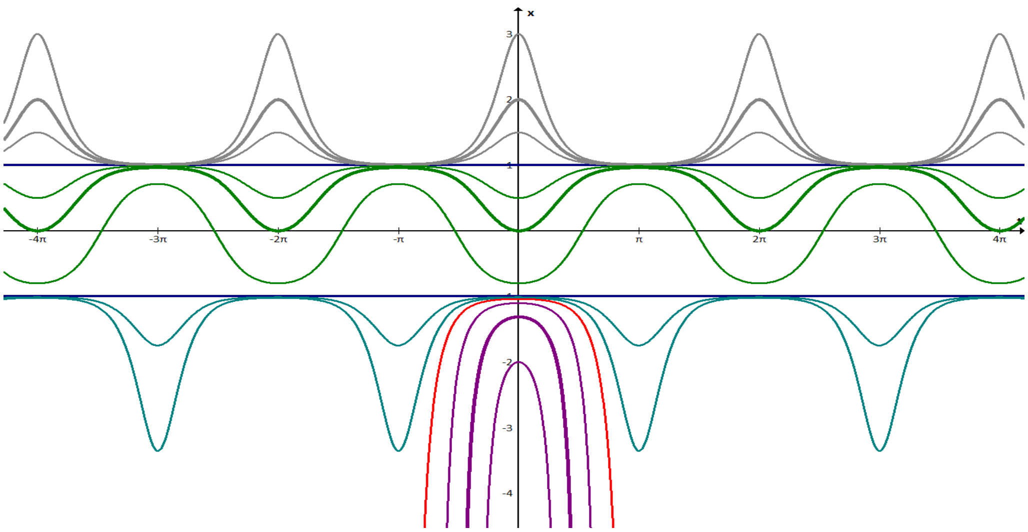
Per $\alpha < \alpha^*$ si ha $c_\alpha \in (-1, 1)$; la condizione (4) è verificata per $t \neq \pm\arccos(c_\alpha) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(0) = \alpha$ è definita nell'intervallo $\big(-\arccos(c_\alpha), \arccos(c_\alpha)\big)$.

Concludo esplicitando alcune proprietà della soluzione x_α del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(0) = \alpha$.

In tutti i casi in cui è globale, x_α è una funzione periodica di periodo 2π; essa oscilla tra il valore $x_\alpha(0) = \alpha$ (minimo per $\alpha \in (-1, 1)$, massimo per $\alpha \in (\alpha^*, -1) \cup (1, +\infty)$) e il valore $x_\alpha(\pi) = \dfrac{(1+\alpha)e^4 - 1 + \alpha}{(1+\alpha)e^4 + 1 - \alpha}$ (massimo per $\alpha \in (-1, 1)$, minimo per $\alpha \in (\alpha^*, -1) \cup (1, +\infty)$).

Per $\alpha \in (-\infty, \alpha^*]$, x_α ha un unico punto di massimo in $t = 0$; essa diverge negativamente agli estremi del proprio intervallo di definizione.

Nella figura in basso, i grafici di alcune soluzioni corrispondenti ad $\alpha \in (1, +\infty)$ sono rappresentati in grigio (il tratto più marcato corrisponde ad $\alpha = 2$); i grafici di alcune soluzioni corrispondenti ad $\alpha \in (-1, 1)$ sono rappresentati in verde (il tratto più marcato corrisponde ad $\alpha = 0$); i grafici di alcune soluzioni corrispondenti ad $\alpha \in (\alpha^*, -1)$ sono rappresentati in azzurro; il grafico di x_{α^*} è rappresentato in rosso; i grafici di alcune soluzioni corrispondenti ad $\alpha \in (-\infty, \alpha^*)$ sono rappresentati in viola (il tratto più marcato corrisponde ad $\alpha = (1 + e^2)/(1 - e^2)$).



Nota: guardando la figura sembra che alcune soluzioni periodiche non costanti assumano ripetutamente i valori 1 oppure -1; naturalmente ciò è precluso dalle ipotesi di unicità locale ed è imputabile esclusivamente alla bassa risoluzione della figura stessa.

Prova scritta del 29 gennaio 2016 – quesito 4

Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = -x - 3y + 2z, \qquad y' = -9x + 15y - 8z, \qquad z' = -14x + 27y - 15z$$

(con $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$).

Svolgimento

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -9 & 15 & -8 \\ -14 & 27 & -15 \end{pmatrix}$$

e ha autovalori $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda = -2$ con molteplicità algebrica 2.
Determino un autovettore per $\lambda = 3$ risolvendo il sistema $(A - 3I)u = 0$, cioè

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -9 & 12 & -8 \\ -14 & 27 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il minore $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}$, che ha determinante $-75 \neq 0$, considero il sistema

$$\begin{cases} -4u_1 - 3u_2 = -2u_3 \\ -9u_1 + 12u_2 = 8u_3 \end{cases}$$

e ottengo

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2u_3 & -3 \\ 8u_3 & 12 \end{vmatrix}}{-75} = 0\,, \qquad u_2 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -2u_3 \\ -9 & 8u_3 \end{vmatrix}}{-75} = \frac{-50u_3}{-75} = \frac{2}{3}u_3\,;$$

scegliendo $u_3 = 3$ ottengo l'autovettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Determino un autovettore per $\lambda = -2$ risolvendo il sistema $(A + 2I)v = 0$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -9 & 17 & -8 \\ -14 & 27 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il minore $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -9 & 17 \end{pmatrix}$, che ha determinante $-10 \neq 0$, considero il sistema

$$\begin{cases} v_1 - 3v_2 = -2v_3 \\ -9v_1 + 17v_2 = 8v_3 \end{cases}$$

e ottengo

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2v_3 & -3 \\ 8u_3 & 17 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-10v_3}{-10} = v_3\,, \qquad v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2v_3 \\ -9 & 8v_3 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-18v_3}{-10} = v_3\,;$$

scegliendo $v_3 = 1$ ottengo l'autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

I calcoli eseguiti qui sopra mostrano che l'autovalore -2 ha molteplicità geometrica 1, strettamente minore della molteplicità algebrica. Pertanto, per ottenere il terzo elemento della base delle soluzioni del sistema differenziale assegnato occorre determinare un autovettore generalizzato relativo all'autovalore -2, risolvendo il sistema $(A+2I)w = v$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -9 & 17 & -8 \\ -14 & 27 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando lo stesso minore di prima, considero il sistema

$$\begin{cases} w_1 - 3w_2 = -2w_3 + 1 \\ -9w_1 + 17w_2 = 8w_3 + 1 \end{cases}$$

e ottengo

$$w_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2w_3+1 & -3 \\ 8w_3+1 & 17 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-10w_3+20}{-10} = w_3 - 2\,, \quad w_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2w_3+1 \\ -9 & 8w_3+1 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-10w_3+10}{-10} = w_3 - 1;$$

scegliendo $w_3 = 1$ ottengo l'autovettore generalizzato $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'integrale generale del sistema assegnato è

$$c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Prova scritta del 12 febbraio 2016 – quesito 3

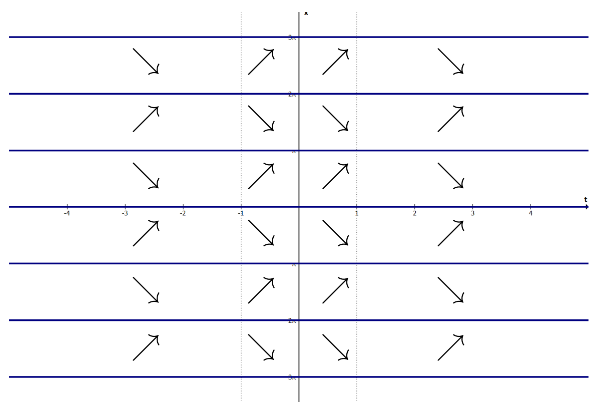
Si consideri l'equazione differenziale $x' = (1 - t^2)\sin(x)$ (con $x = x(t)$).

- In base alla teoria e all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sugli intervalli di esistenza delle soluzioni, sulla monotonia delle stesse e sull'andamento agli estremi dei rispettivi intervalli di esistenza.
- Si determini esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(0) = \alpha$, con $\alpha \in \left\{-\frac{5}{2}\pi, 0, \frac{\pi}{4}\right\}$, e se ne tracci il grafico.

Svolgimento

Posto $f(t,x) := (1 - t^2)\sin(x)$, si ha $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; ciò implica che f è continua ed è localmente lipschiziana rispetto alla variabile x, uniformemente in t, e basta a garantire l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy con arbitraria condizione iniziale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Inoltre, f è prodotto della funzione $t \in \mathbb{R} \mapsto 1 - t^2$, che è continua, e della funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$, che è limitata; ciò implica che f soddisfa la condizione di sublinearità in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e basta a garantire che tutte le soluzioni massimali siano globali, cioè definite in $\mathbb{R}$.

L'equazione differenziale assegnata ammette infinite soluzioni di equilibrio: $u_k(t) \equiv k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Il grafico di qualsiasi altra soluzione è contenuto nella striscia orizzontale delimitata dalle rette $x = h\pi$ e $x = (h+1)\pi$, per un opportuno $h \in \mathbb{Z}$.



L'equazione ammette anche due zero-cline, le rette di equazione $t = 1$ e $t = -1$. Dal segno di f deduco che le soluzioni hanno la monotonia indicata nella figura qui a lato.

Dato che sono definitivamente monotone, oltre che limitate, tutte le soluzioni non costanti ammettono limiti finiti sia per $t \to -\infty$ che per $t \to +\infty$. È facile vedere che sono asintotiche alle soluzioni costanti "adiacenti".

Per esempio, considero una qualsiasi soluzione $x = x(t)$ con valori compresi tra 0 e π; essa è decrescente per $t > 1$; il limite per $t \to +\infty$ è un numero reale $\ell \in [0, \pi)$. Se fosse $\ell > 0$, per $t \to +\infty$ si avrebbe $\sin(x(t)) \to \sin(\ell) > 0$ e quindi $x'(t) = (1 - t^2)\sin(x(t)) \to -\infty$, un assurdo. Ne segue che $x(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. In modo analogo si può ragionare per gli altri casi.

L'equazione assegnata è a variabili separabili. Supponendo $x(t) \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, riscrivo l'equazione:

$$\frac{x'(t)}{\sin(x(t))} = 1 - t^2. \tag{1}$$

Risulta

$$\frac{x'(t)}{\sin(x(t))} = \frac{\sin(x(t))x'(t)}{1 - \cos(x(t))^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x(t))x'(t)}{1 - \cos(x(t))} + \frac{\sin(x(t))x'(t)}{1 + \cos(x(t))}\right) = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \cos(x(t))}{1 + \cos(x(t))}\right)\right)'$$

e

$$1-t^2=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)'.$$

Pertanto, da (1):

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(x(t))}{1+\cos(x(t))}\right)=t-\frac{t^3}{3}+c' \qquad (c'\in\mathbb{R})$$

quindi

$$\frac{1-\cos(x(t))}{1+\cos(x(t))}=c\,e^{2t-2t^3/3} \qquad (c\in(0,+\infty))$$

e infine

$$\cos(x(t))=\frac{1-c\,e^{2t-2t^3/3}}{1+c\,e^{2t-2t^3/3}} \qquad (c\in(0,+\infty)). \tag{2}$$

Noto che la funzione a secondo membro è definita in $\mathbb{R}$ e assume valori strettamente compresi tra -1 e 1; ne deduco che l'uguaglianza in (2) è lecita per ogni $t\in\mathbb{R}$.
Per $a\in(-1,1)$, l'equazione $\cos(\theta)=a$ ha infinite soluzioni:

$$\theta=\arccos(a)+2k\pi, \qquad \theta=-\arccos(a)+2k\pi,$$

con $k\in\mathbb{Z}$. Pertanto, da (2) ottengo due famiglie di soluzioni dell'equazione differenziale assegnata:

$$\varphi_{k,c}(t)=\arccos\left(\frac{1-c\,e^{2t-2t^3/3}}{1+c\,e^{2t-2t^3/3}}\right)+2k\pi, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

e

$$\psi_{k,c}(t)=-\arccos\left(\frac{1-c\,e^{2t-2t^3/3}}{1+c\,e^{2t-2t^3/3}}\right)+2k\pi, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

con $k\in\mathbb{Z}$ e $c\in(0,+\infty)$.
Fissato $k\in\mathbb{Z}$, (3) fornisce al variare di $c\in(0,+\infty)$ tutte le soluzioni che assumono valori nell'intervallo $J_k^+:=\big(2k\pi,(2k+1)\pi\big)$, mentre (4) fornisce tutte le soluzioni che assumono valori nell'intervallo $J_k^-:=\big((2k-1)\pi,2k\pi\big)$.

La soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente la condizione iniziale $x(0)=0$ è , evidentemente, la soluzione di equilibrio $u_0(t)\equiv 0$.

Determino la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(0)=\pi/4$. Osservo che il valore iniziale appartiene all'intervallo $(0,\pi)=:J_0^+$, quindi la soluzione corrispondente si ottiene da (3) per $k=0$. Impongo la condizione iniziale:

$$\varphi_{0,c}(0)=\frac{\pi}{4} \iff \arccos\left(\frac{1-c}{1+c}\right)=\frac{\pi}{4} \iff \frac{1-c}{1+c}=\frac{1}{\sqrt{2}} \iff c=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

La soluzione è

$$\varphi(t)=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)e^{2t-2t^3/3}}{\sqrt{2}+1+(\sqrt{2}-1)e^{2t-2t^3/3}}\right), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Determino la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(0) = -5\pi/2$. Osservo che il valore iniziale appartiene all'intervallo $(-3\pi, -2\pi) =: J^-_{-1}$, quindi la soluzione corrispondente si ottiene da (4) per $k = -1$. Impongo la condizione iniziale:

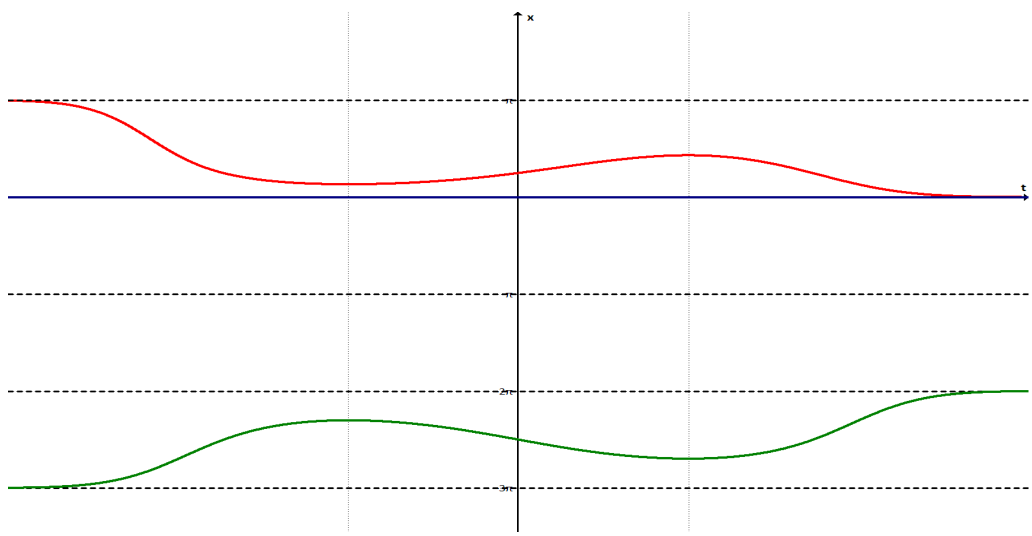
$$\psi_{-1,c}(0) = -\frac{5\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\arccos\left(\frac{1-c}{1+c}\right) - 2\pi = -\frac{5\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{1-c}{1+c}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1-c}{1+c} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 1.$$

La soluzione è

$$\psi(t) = -\arccos\left(\frac{1 - e^{2t-2t^3/3}}{1 + e^{2t-2t^3/3}}\right) - 2\pi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

I grafici delle soluzioni dei tre problemi di Cauchy assegnati sono rappresentati nella figura qui in basso: u_0 in blu, φ in rosso, ψ in verde.



Nota: guardando la figura sembra che i grafici di soluzioni distinte si sovrappongano in parte; naturalmente ciò è precluso dalle ipotesi di unicità locale ed è imputabile esclusivamente alla bassa risoluzione della figura stessa.

Prova scritta del 12 febbraio 2016 – quesito 4

Si utilizzi il metodo di Lagrange (variazione delle costanti) per determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = 3x - 2y + e^{2t}, \qquad y' = x + y$$

(con $x = x(t)$, $y = y(t)$).

Svolgimento

Risolvo anzitutto il sistema differenziale omogeneo associato. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e ha autovalori complessi coniugati $\lambda = 2 \pm i$.

Determino un autovettore per $\lambda = 2 + i$ risolvendo il sistema $(A - (2+i)I)w = 0$, cioè

$$\begin{cases} (1-i)w_1 - 2w_2 = 0, \\ w_1 - (1+i)w_2 = 0; \end{cases}$$

da $w_1 = (1+i)w_2$, scegliendo $w_2 = 1$, ottengo l'autovettore complesso $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In corrispondenza determino due soluzioni linearmente indipendenti del sistema differenziale omogeneo:

$$\varphi(t) = e^{2t}\left[\cos(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \qquad \psi(t) = e^{2t}\left[\sin(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right],$$

la cui matrice Wronskiana è

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(t) - \sin(t)) & e^{2t}(\sin(t) + \cos(t)) \\ e^{2t}\cos(t) & e^{2t}\sin(t) \end{pmatrix},$$

con determinante $w(t) = -e^{4t}$.

L'integrale generale del sistema differenziale omogeneo è $W(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerco ora una soluzione particolare del sistema differenziale completo della forma $\eta(t) = W(t)\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$, con $\xi_1, \xi_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Imponendo che η risolva il sistema differenziale ottengo il seguente sistema, in cui le incognite sono le derivate delle funzioni ξ_1 e ξ_2:

$$\begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(t) - \sin(t)) & e^{2t}(\sin(t) + \cos(t)) \\ e^{2t}\cos(t) & e^{2t}\sin(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1'(t) \\ \xi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ne ricavo

$$\xi_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{2t}(\sin(t) + \cos(t)) \\ 0 & e^{2t}\sin(t) \end{vmatrix}}{-e^{4t}} = -\sin(t), \qquad \xi_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t}(\cos(t) - \sin(t)) & e^{2t} \\ e^{2t}\cos(t) & 0 \end{vmatrix}}{-e^{4t}} = \cos(t),$$

da cui deduco che posso scegliere

$$\xi_1(t) = \cos(t), \qquad \xi_2(t) = \sin(t).$$

In conclusione, l'integrale generale del sistema differenziale assegnato è

$$\begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(t) - \sin(t)) & e^{2t}(\sin(t) + \cos(t)) \\ e^{2t}\cos(t) & e^{2t}\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) + c_1 \\ \sin(t) + c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}\big[1 + c_1(\cos(t) - \sin(t)) + c_2(\sin(t) + \cos(t))\big] \\ e^{2t}\big[1 + c_1\cos(t) + c_2\sin(t)\big] \end{pmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

Prova scritta del 18 luglio 2016 – quesito 3

Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = \cos(t)(x - x^2) \tag{1}$$

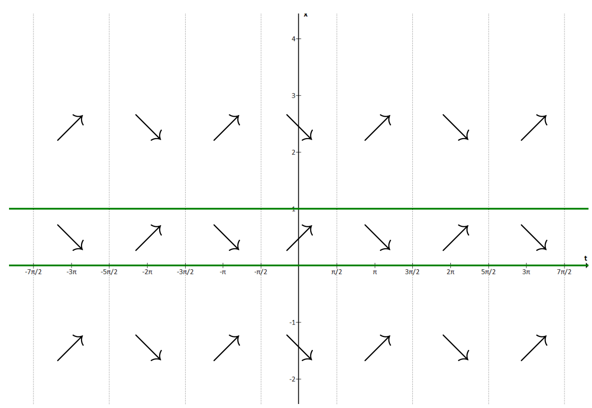
con $x = x(t)$.

- In base alla teoria e all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sugli intervalli di esistenza delle soluzioni e sulla monotonia delle stesse.
- Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si determini esplicitamente la soluzione soddisfacente la condizione iniziale $x(0) = \alpha$, specificandone l'intervallo di esistenza.
- Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

Svolgimento

Posto $f(t,x) := \cos(t)(x - x^2)$, si ha $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; ciò implica che f è continua ed è localmente lipschiziana rispetto alla variabile x, uniformemente in t, e basta a garantire l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy con arbitraria condizione iniziale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dato che f non verifica la condizione di sublinearità (in quanto cresce quadraticamente rispetto alla variabile x) non si può garantire che tutte le soluzioni (massimali) siano globali.

Osservo che l'equazione (1) ammette due soluzioni di equilibrio: $x_0(t) \equiv 0$ e $x_1(t) \equiv 1$, entrambe definite in $\mathbb{R}$. Il grafico di qualsiasi altra soluzione è interamente contenuto nel semipiano inferiore delimitato dalla retta $x = 0$, oppure nella striscia orizzontale delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = 1$, oppure nel semipiano superiore delimitato dalla retta $x = 1$. Le soluzioni con grafico nella striscia orizzontale sono limitate e quindi globali.



L'equazione (1) ammette infinite zero-cline, le rette di equazione $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Dal segno di f deduco che le soluzioni hanno la monotonia indicata nella figura qui sopra.

Per $\alpha \in \{0,1\}$ la soluzione di (1) soddisfacente la condizione iniziale $x(0) = \alpha$ è già nota (è la soluzione costante di valore α). Supponendo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, procedo per separazione delle variabili:

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{x(s) - x(s)^2}\, ds = \int_0^t \cos(s)\, ds; \tag{1}$$

osservando che

$$\frac{x'(s)}{x(s) - x(s)^2} = \frac{x'(s)}{x(s)} + \frac{x'(s)}{1 - x(s)} = \left(\ln\left|\frac{x(s)}{1 - x(s)}\right|\right)',$$

ottengo

$$\ln\left|\frac{x(t)}{1-x(t)}\right| - \ln\left|\frac{\alpha}{1-\alpha}\right| = \sin(t) - \sin(0),$$

da cui

$$\ln\left|\frac{x(t)}{1-x(t)}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\right| = \sin(t). \tag{2}$$

Per le considerazioni fatte in precedenza, i termini $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ e $\dfrac{x(t)}{1-x(t)}$ sono concordi per ogni t in cui la soluzione sia definita. Pertanto, da (2) ottengo

$$\frac{x(t)}{1-x(t)}\,\frac{1-\alpha}{\alpha} = e^{\sin(t)},$$

da cui

$$x(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,e^{\sin(t)}\big(1-x(t)\big)$$

e infine

$$\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\,e^{\sin(t)}\right)x(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,e^{\sin(t)}.$$

La soluzione massimale del problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0)=\alpha$ è quindi la funzione

$$x_\alpha(t) = \frac{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,e^{\sin(t)}}{1+\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,e^{\sin(t)}} = 1 - \frac{1-\alpha}{1+\alpha(e^{\sin(t)}-1)}$$

definita in I_α, il più ampio intervallo contenente $t=0$ in cui la condizione

$$e^{\sin(t)} \neq \frac{\alpha-1}{\alpha} \tag{3}$$

è soddisfatta.

Se $\dfrac{\alpha-1}{\alpha} < 0$, allora la condizione (3) è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ciò equivale a dire che per $\alpha \in (0,1)$ si ha $I_\alpha = \mathbb{R}$; come previsto, la soluzione x_α è globale. Osservo che x_α è una funzione periodica di periodo 2π che oscilla tra il minimo $x_\alpha\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ e il massimo $x_\alpha\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Considero ora il caso in cui $\dfrac{\alpha-1}{\alpha} > 0$; la condizione (3) equivale a

$$\sin(t) \neq \ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right). \tag{4}$$

Questa condizione è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ se

$$\ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) > 1 \quad \text{oppure} \quad \ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) < -1\,;$$

è facile verificare che la prima disuguaglianza equivale a $\dfrac{1}{1-e} < \alpha < 0$ e la seconda a $1 < \alpha < \dfrac{e}{e-1}$.

Ne deduco che per $\alpha \in \left(\dfrac{1}{1-e}, 0\right) \cup \left(1, \dfrac{e}{e-1}\right)$ la soluzione x_α è definita in $I_\alpha = \mathbb{R}$ (e quindi globale, il che non si poteva prevedere in base alla teoria). Osservo che x_α è una funzione periodica di periodo 2π che oscilla tra il minimo $x_\alpha\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ e il massimo $x_\alpha\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Resta da determinare I_α per $\alpha \in \left(-\infty, \dfrac{1}{1-e}\right]$ e per $\alpha \in \left[\dfrac{e}{e-1}, +\infty\right)$. Per tali α si ha, rispettivamente,

$$0 < \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) < 0;$$

posto

$$t_\alpha := \arcsin\left(\ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right),$$

la condizione (4) è soddisfatta per $t \in \mathbb{R} \setminus \left(\{t_\alpha + 2\,k\,\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - t_\alpha + 2\,k\,\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right)$.

Per $\alpha \in \left(-\infty, \dfrac{1}{1-e}\right]$ e per $\alpha \in \left[\dfrac{e}{e-1}, +\infty\right)$ si ha, rispettivamente, $t_\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e $t_\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$; tenuto conto del fatto che I_α è un intervallo contenente $t = 0$, si deduce, rispettivamente, $I_\alpha = (-\pi - t_\alpha, t_\alpha)$ e $I_\alpha = (t_\alpha, \pi - t_\alpha)$. Osservo che in entrambi i casi x_α diverge agli estremi di I_α.

I grafici delle soluzioni corrispondenti ad alcuni valori di α sono rappresentati nella figura qui in basso: in verde le soluzioni costanti, in blu alcune soluzioni globali non costanti, in rosso alcune soluzioni non globali (le "separatrici", corrispondenti ai valori "di soglia" $\alpha = \dfrac{1}{1-e}$ e $\alpha = \dfrac{e}{e-1}$, sono evidenziate con un tratto più marcato).