Corso di Laurea Triennale in Fisica

Svolgimento di alcuni quesiti assegnati nelle prove scritte di Analisi Matematica III

Nota: lo svolgimento che propongo per i quesiti non è l'unico possibile e ha valore indicativo. Sarò grata a chi vorrà segnalare imprecisioni o proporre miglioramenti (scrivere a monica.lazzo@uniba.it).

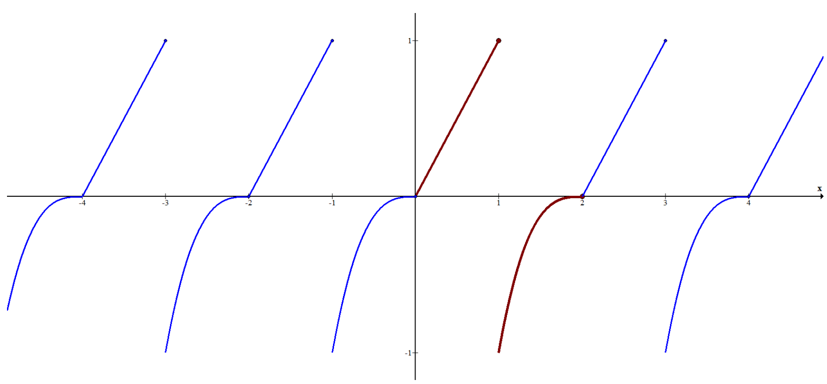
Prova scritta del 19 dicembre 2014

1. Osservo preliminarmente che la successione $\{f_n(x)\}$ converge a 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$; questo mi autorizza a studiare la convergenza della serie assegnata in $\mathbb{R}$.
Essendo $f_n(0) = 0$ per ogni n, la serie converge assolutamente in $x = 0$.
Per $x \neq 0$, il termine $\left|\dfrac{n\,x e^{-nx^2}}{n+1}\right|$ è multiplo di $\dfrac{n\,e^{-nx^2}}{n+1}$, asintoticamente equivalente a $e^{-nx^2} = (e^{-x^2})^n$; siccome $e^{-x^2} \in (0,1)$, la serie geometrica di termine $(e^{-x^2})^n$ converge; per confronto asintotico, la serie assegnata converge assolutamente.
Fissato n, studiando il segno della derivata di f_n riconosco facilmente che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left| f_n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right| = \frac{n\,e^{-1/2}}{(n+1)\sqrt{2n}} \sim \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2n}};$$

poiché la serie armonica generalizzata di termine $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la serie assegnata non converge totalmente in $\mathbb{R}$. Tuttavia, fissato $\delta > 0$ e posto $A_\delta = \mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)$, si ha definitivamente $\sup_{x\in A_\delta} |f_n(x)| = |f_n(\pm\delta)|$; poiché la serie assegnata converge assolutamente in $\mathbb{R}$, la serie di termine $|f_n(\pm\delta)|$ converge e quindi la serie assegnata converge totalmente (e perciò uniformemente) in A_δ.
[Resta da stabilire se la serie assegnata converge uniformemente in un intorno di $x = 0$; ciò richiede ulteriori considerazioni, che nella valutazione della prova scritta considero facoltative e qui ometto.]

2. La funzione f ha il seguente grafico (in rosso la porzione assegnata esplicitamente):



Evidentemente f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2k+1 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, con

$$\lim_{x\to(2k+1)^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to(2k+1)^+} f(x) = -1$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre f è regolare a tratti in $\mathbb{R}$: con riferimento all'intervallo $[0,2]$, f è di classe C^1 in $(0,1)$ e in $(1,2)$ e si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 3, \quad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = 0.$$

In base alla teoria che ho presentato nel corso, la serie di Fourier associata a f converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \dfrac{f(1^-)+f(1^+)}{2} = 0 & x \in \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

e uniformemente a f in ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R} \setminus \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

La serie di Fourier di f è

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\pi n x) + b_n \sin(\pi n x)\right),$$

con

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x dx + \int_1^2 (x-2)^3 dx\right) = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{(x-2)^4}{4}\right]_1^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

e, per $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\cos(\pi n x)dx = \int_0^1 x\cos(\pi n x)dx + \int_1^2 (x-2)^3\cos(\pi n x)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\sin(\pi n x)dx = \int_0^1 x\sin(\pi n x)dx + \int_1^2 (x-2)^3\sin(\pi n x)dx.$$

Integrando per parti:

$$\int_0^1 x\cos(\pi n x)dx = \left[x\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}dx = \left[\frac{\cos(\pi n x)}{(\pi n)^2}\right]_0^1 = \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{1}{(\pi n)^2}$$

e

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x-2)^3\cos(\pi n x)dx &= \left[(x-2)^3\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_1^2 - \int_1^2 3(x-2)^2\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}dx \\ &= \left[3(x-2)^2\frac{\cos(\pi n x)}{(\pi n)^2}\right]_1^2 - \int_1^2 6(x-2)\frac{\cos(\pi n x)}{(\pi n)^2}dx \\ &= -3\,\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \left[6(x-2)\frac{\sin(\pi n x)}{(\pi n)^3}\right]_1^2 + \int_1^2 6\,\frac{\sin(\pi n x)}{(\pi n)^3}dx \\ &= -3\,\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \left[6\,\frac{\cos(\pi n x)}{(\pi n)^4}\right]_1^2 = -3\,\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{6}{(\pi n)^4} + 6\,\frac{(-1)^n}{(\pi n)^4}, \end{aligned}$$

da cui
$$a_n = \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{1}{(\pi n)^2} - 3\,\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{6}{(\pi n)^4} + 6\,\frac{(-1)^n}{(\pi n)^4} = -\frac{1+2(-1)^n}{(\pi n)^2} + 6\,\frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^4}.$$
Inoltre:
$$\int_0^1 x\sin(\pi n x)dx = \left[-x\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}dx = -\frac{(-1)^n}{\pi n} + \left[\frac{\sin(\pi n x)}{(\pi n)^2}\right]_0^1 = -\frac{(-1)^n}{\pi n}$$
e
$$\begin{aligned}\int_1^2 (x-2)^3\sin(\pi n x)dx &= \left[-(x-2)^3\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_1^2 + \int_1^2 3(x-2)^2\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}dx = \\ &= -\frac{(-1)^n}{\pi n} + \left[3(x-2)^2\frac{\sin(\pi n x)}{(\pi n)^2}\right]_1^2 - \int_1^2 6(x-2)\frac{\sin(\pi n x)}{(\pi n)^2}dx \\ &= -\frac{(-1)^n}{\pi n} + \left[6(x-2)\frac{\cos(\pi n x)}{(\pi n)^3}\right]_1^2 - \int_1^2 6\frac{\cos(\pi n x)}{(\pi n)^3}dx \\ &= -\frac{(-1)^n}{\pi n} + 6\,\frac{(-1)^n}{(\pi n)^3} - \left[6\frac{\sin(\pi n x)}{(\pi n)^4}\right]_1^2 = -\frac{(-1)^n}{\pi n} + 6\,\frac{(-1)^n}{(\pi n)^3},\end{aligned}$$
da cui
$$b_n = -\frac{(-1)^n}{\pi n} - \frac{(-1)^n}{\pi n} + 6\frac{(-1)^n}{(\pi n)^3} = -2\,\frac{(-1)^n}{\pi n} + 6\,\frac{(-1)^n}{(\pi n)^3}.$$

3. Posto $f(t,x) := (2t-1)(e^x - 1)$, si ha $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$; questo basta a garantire l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy con arbitraria condizione iniziale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Crescendo esponenzialmente rispetto a x, la funzione f non soddisfa la condizione di sublinearità; pertanto, non è garantito che le soluzioni massimali dell'equazione siano globali, cioè definite in $\mathbb{R}$.
L'equazione assegnata ammette la soluzione di equilibrio $x(t) \equiv 0$. Ogni altra soluzione assumerà valori solo strettamente positivi o solo strettamente negativi nel proprio intervallo di esistenza. Dal segno di $f(t,x)$ deduco che le soluzioni strettamente positive sono decrescenti a sinistra di $t = 1/2$ e crescenti a destra di $t = 1/2$, mentre le soluzioni strettamente negative sono crescenti a sinistra di $t = 1/2$ e decrescenti a destra.
Risolvo l'equazione per separazione delle variabili, supponendo $x(t) \neq 0$:
$$\frac{x'(t)}{e^{x(t)} - 1} = 2t - 1.$$
Dato che
$$\begin{aligned}\int \frac{x'(t)}{e^{x(t)}-1}dt &= \int \frac{e^{x(t)}x'(t)}{e^{x(t)}(e^{x(t)}-1)}dt = \int \frac{1}{u(u-1)}du \\ &= \int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)du = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + c_1 = \ln\left|\frac{e^{x(t)}-1}{e^{x(t)}}\right| + c_1\end{aligned}$$

e

$$\int (2t-1)dt = t^2 - t + c_2,$$

ottengo

$$\ln\left|\frac{e^{x(t)}-1}{e^{x(t)}}\right| = t^2 - t + c' \qquad (c' \in \mathbb{R})$$

da cui

$$\left|\frac{e^{x(t)}-1}{e^{x(t)}}\right| = c\, e^{t^2-t} \qquad (c \in (0,\infty))$$

e quindi

$$\frac{e^{x(t)}-1}{e^{x(t)}} = c\, e^{t^2-t} \qquad (c \in \mathbb{R}^*). \tag{1}$$

Osservo che a $c \in (-\infty, 0)$ corrispondono soluzioni strettamente negative, mentre a $c \in (0, +\infty)$ corrispondono soluzioni strettamente positive. (Per $c = 0$ da (1) otterrei la soluzione di equilibrio.)
Da (1) ottengo

$$e^{x(t)} - 1 = c\, e^{t^2-t} e^{x(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{x(t)}(1 - c\, e^{t^2-t}) = 1. \tag{2}$$

Osservo che la seconda uguaglianza in (2) ha senso se e solo se

$$1 - c\, e^{t^2-t} > 0. \tag{3}$$

Per $c \in (-\infty, 0)$ questa disuguaglianza è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$; da (2), dividendo per $1 - c\, e^{t^2-t}$ e applicando il logaritmo naturale ad ambo i membri, ottengo la soluzione

$$x_c(t) = \ln\left(\frac{1}{1 - c\, e^{t^2-t}}\right) = -\ln(1 - c\, e^{t^2-t}), \tag{4}$$

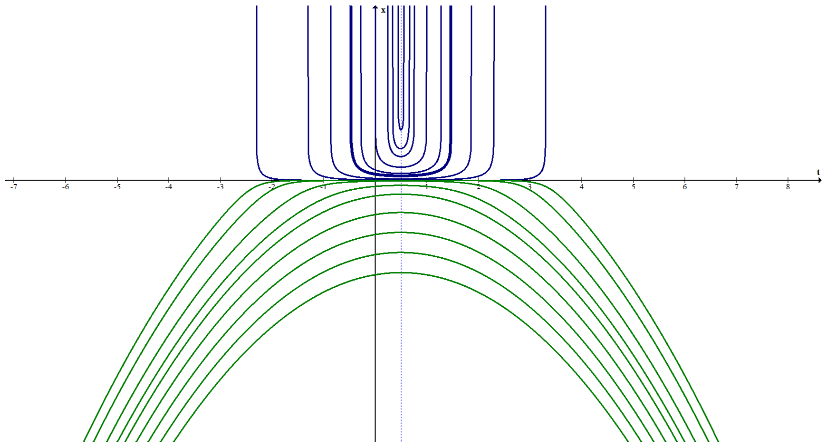
definita in $\mathbb{R}$. Le soluzioni corrispondenti ad alcuni valori negativi di c sono rappresentati in verde nella figura della pagina seguente. Noto che al decrescere di c il grafico della soluzione corrispondente si allontana dall'asse $x = 0$.
Per $c \in (0, +\infty)$ la disuguaglianza (3) equivale a

$$e^{t^2-t} < \frac{1}{c}. \tag{5}$$

Dato che il minimo della funzione $t \mapsto e^{t^2-t}$ è $e^{-1/4}$, deduco che se $e^{-1/4} \geq 1/c$, cioè se $c \in [e^{1/4}, \infty)$, la disuguaglianza in (5) non è soddisfatta per alcun $t \in \mathbb{R}$ e quindi in corrispondenza non ottengo soluzioni dell'equazione differenziale assegnata. Per $c \in (0, e^{1/4})$, invece, la disuguaglianza in (5) è soddisfatta per $t \in (t_c', t_c'')$, con

$$t_c' = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\ln(c)}}{2} \qquad\qquad t_c'' = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\ln(c)}}{2}.$$

In corrispondenza, la soluzione x_c, definita come in (4), ha intervallo di esistenza (t_c', t_c''). Tale intervallo è massimale, in quanto x_c diverge per $t \to {t_c'}^+$ e per $t \to {t_c''}^-$ e quindi non è prolungabile.
Osservo che $t_c' < 1/2 < t_c''$ per ogni $c \in (0, e^{1/4})$; per $c \to e^{1/4}$ sia t_c' che t_c'' tendono a $1/2$, mentre il minimo della soluzione, dato da $x_c(1/2) = -\ln(1 - c\, e^{-1/4})$, diverge positivamente.



Le soluzioni corrispondenti ad alcuni valori di $c \in (0, e^{1/4})$ sono rappresentati in blu nella figura qui in alto.

Risolvo il problema di Cauchy assegnato. Imponendo la condizione iniziale $x(1) = \ln(2)$ in (4) ottengo $\ln(2) = -\ln(1 - c\, e^0)$, cioè $2 = 1/(1-c)$, cioè $c = 1/2$. La soluzione è

$$x_{\frac{1}{2}}(t) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\, e^{t^2 - t}\right), \tag{6}$$

con intervallo di esistenza $\left(\dfrac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}\right)$. Il grafico di $x_{\frac{1}{2}}$ è evidenziato con un tratto più marcato nella figura in alto.

4. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

e ha autovalori $\lambda = -2$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 2; dato che la matrice

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica 1; questo rende necessario determinare un autovettore generalizzato per $\lambda = 2$.

Comincio a determinare un autovettore per $\lambda = -2$, risolvendo il sistema

$$(A + 2I)u = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

dalle relazioni $5u_1+2u_2+3u_3=0$, $u_1+2u_2-u_3=0$ segue che posso scegliere $u_1=1$, $u_2=u_3=-1$; in corrispondenza ottengo la soluzione del sistema

$$\varphi_1(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Determino un autovettore per $\lambda=2$, risolvendo il sistema

$$(A-2I)v=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-2&-1\\-1&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

dalle relazioni $v_1+2v_2+3v_3=0$, $v_1-2v_2-v_3=0$ segue che posso scegliere $v_1=v_2=1$, $v_3=-1$; in corrispondenza ottengo la soluzione del sistema

$$\varphi_2(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\-e^{2t}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Determino un autovettore generalizzato per $\lambda=2$, risolvendo il sistema

$$(A-2I)w=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-2&-1\\-1&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix};$$

dalle relazioni $w_1+2w_2+3w_3=1$, $w_1-2w_2-w_3=1$ segue che posso scegliere $w_1=1$, $w_2=w_3=0$; in corrispondenza ottengo la soluzione del sistema

$$\varphi_3(t)=e^{2t}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}e^{2t}(1+t)\\t\,e^{2t}\\-t\,e^{2t}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

La matrice Wronskiana delle tre soluzioni ottenute è

$$W(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t}&e^{2t}&e^{2t}(1+t)\\-e^{-2t}&e^{2t}&t\,e^{2t}\\-e^{-2t}&-e^{2t}&-t\,e^{2t}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R};$$

per $t=0$ ottengo la matrice

$$W(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

il cui determinante è diverso da 0; ciò implica che le tre soluzioni ottenute sono linearmente indipendenti. In conclusione, l'integrale generale del sistema assegnato è

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+c_3\varphi_3(t),\quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\quad(t\in\mathbb{R}).$$

Presento un procedimento alternativo ma equivalente: determino una soluzione del sistema nella forma

$$\varphi(t) = e^{-2t}u + e^{2t}w + t\,e^{2t}v$$

con u, w, v vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$ che dipendono complessivamente da 3 costanti reali. La funzione φ risolve il sistema assegnato se e solo se

$$-2e^{-2t}u + 2e^{2t}w + e^{2t}v + 2\,t\,e^{2t}v = e^{-2t}Au + e^{2t}Aw + t\,e^{2t}Av \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

cioè

$$Au = -2u, \quad Aw = 2w + v, \quad Av = 2v.$$

Pertanto, u risolve l'equazione $(A + 2I)u = 0$ e quindi (come visto nel primo procedimento)

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

v risolve l'equazione $(A - 2I)v = 0$ e quindi

$$v = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R};$$

infine, w risolve l'equazione $(A - 2I)w = v$ e, tenuto conto delle relazioni $w_1 + 2w_2 + 3w_3 = \beta$, $w_1 - 2w_2 - w_3 = \beta$, posso scegliere $w_1 = \gamma + \beta$, $w_2 = \gamma$, $w_3 = -\gamma$, cioè

$$w = \begin{pmatrix} \gamma + \beta \\ \gamma \\ -\gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R};$$

Ottengo quindi la soluzione

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = e^{-2t}u + e^{2t}w + t\,e^{2t}v &= e^{-2t}\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} \gamma + \beta \\ \gamma \\ -\gamma \end{pmatrix} + t\,e^{2t}\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \\
&= \alpha e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t}\left[\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \beta t\,e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \alpha e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right], \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (t \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

che coincide con quanto trovato seguendo il primo procedimento.

5. Risolvo l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^3 + \lambda + 2 = 0$ e ha radici $\lambda = -1$, $\lambda = (1+i\sqrt{7})/2$, $\lambda = (1-i\sqrt{7})/2$, alle quali corrispondono le soluzioni linearmente indipendenti

$$\varphi_1(t) = e^{-t}, \quad \varphi_2(t) = e^{t/2}\cos(\sqrt{7}t/2), \quad \varphi_3(t) = e^{t/2}\sin(\sqrt{7}t/2) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Risolvo l'equazione completa con il metodo di somiglianza, Dato che $\lambda = 2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerco una soluzione del tipo $x(t) = (at+b)e^{2t}$. Risulta:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ae^{2t} + 2(at+b)e^{2t} = (2at + a + 2b)e^{2t} \\ x''(t) &= 2ae^{2t} + 2(2at + a + 2b)e^{2t} = (4at + 4a + 4b)e^{2t} \\ x'''(t) &= 4ae^{2t} + 2(4at + 4a + 4b)e^{2t} = (8at + 12a + 8b)e^{2t} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione ottengo

$$(8at + 12a + 8b)e^{2t} + (2at + a + 2b)e^{2t} + 2(at+b)e^{2t} = (3t+1)e^{2t};$$

l'uguaglianza è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$8a + 2a + 2a = 3, \quad 12a + 8b + a + 2b + 2b = 1,$$

cioè $a = 1/4$ e $b = -3/16$.
In conclusione, l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$c_1 e^{-t} + c_2 e^{t/2}\cos(\sqrt{7}t/2) + c_3 e^{t/2}\sin(\sqrt{7}t/2) + \left(\frac{t}{4} - \frac{3}{16}\right)e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Prova scritta del 12 gennaio 2015 (quesiti 1 e 3)

1. Osservo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}}{x^{2n}+1} = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 1/2 & |x|=1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$$

e pertanto la successione assegnata converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ \pi/6 & |x|=1 \\ \pi/2 & |x|>1. \end{cases}$$

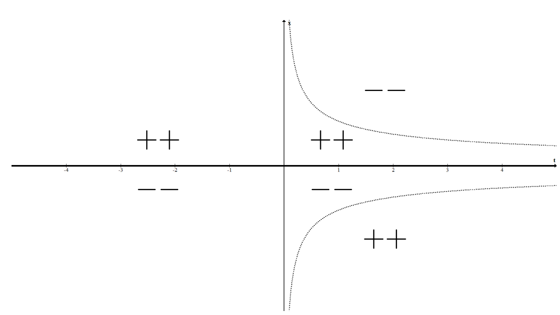
La funzione f è discontinua in $x=-1$ e $x=1$; dato che ciascuna f_n è invece continua in $\mathbb{R}$, la successione $\{f_n\}$ non può convergere uniformemente a f in $\mathbb{R}$.
Verifico che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in ciascun insieme del tipo $X_{a,b} := \mathbb{R}\setminus((-b,-a)\cup(a,b))$, con $0<a<1<b$. Tenuto conto del fatto che f_n è una funzione pari ed è crescente in $\mathbb{R}_+$, ottengo:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in X_{a,b}} |f_n(x)-f(x)| &= \sup_{x\in[0,a]\cup[b,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \max\Big\{\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)-0|, \sup_{x\in[b,+\infty)}|f_n(x)-\pi/2|\Big\} \\ &= \max\Big\{\sup_{x\in[0,a]} f_n(x), \sup_{x\in[b,+\infty)}(\pi/2-f_n(x))\Big\} = \max\big\{f_n(a), \pi/2-f_n(b)\big\}.\end{aligned}$$

Poiché le successioni $\{f_n(a)\}$ e $\{\pi/2-f_n(b)\}$ sono infinitesime, ottengo $\sup_{x\in X_{a,b}}|f_n(x)-f(x)| \to 0$.

3. Posto $f(t,x) := 3x-2tx^3$, si ha $f\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$; questo basta a garantire l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy con arbitraria condizione iniziale $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Crescendo come una potenza di esponente 3 rispetto a x, la funzione f non soddisfa la condizione di sublinearità; pertanto, non è garantito che le soluzioni massimali dell'equazione siano globali, cioè definite in $\mathbb{R}$.

Osservo preliminarmente che l'equazione assegnata ammette la soluzione di equilibrio $x(t)\equiv 0$. Ogni altra soluzione assumerà valori solo strettamente positivi o solo strettamente negativi nel proprio intervallo di esistenza.
La funzione f si annulla anche per $x=\sqrt{3/(2t)}$ e $x=-\sqrt{3/(2t)}$; le zero-cline corrispondenti sono tratteggiate nella figura qui a lato. Inoltre, f è positiva nelle regioni contrassegnate con $++$ e negativa nelle regioni contrassegnate con $--$.



L'equazione assegnata è di Bernoulli. Supponendo $x(t) \neq 0$ e dividendo per $x(t)^3$, dall'equazione assegnata ottengo

$$x(t)^{-3}x'(t) = 3x(t)^{-2} - 2t.$$

Posto $z(t) := x(t)^{-2}$, la funzione z risolve l'equazione lineare del primo ordine

$$z'(t) = -6z(t) + 4t. \tag{1}$$

L'integrale generale di (1) è

$$e^{-6t}\int e^{6t}4t\,dt = e^{-6t}\left(\frac{2}{3}e^{6t}t - \frac{2}{3}\int e^{6t}dt\right) = e^{-6t}\left(\frac{2}{3}e^{6t}t - \frac{1}{9}e^{6t} + c\right) = \frac{2}{3}t - \frac{1}{9} + ce^{-6t}.$$

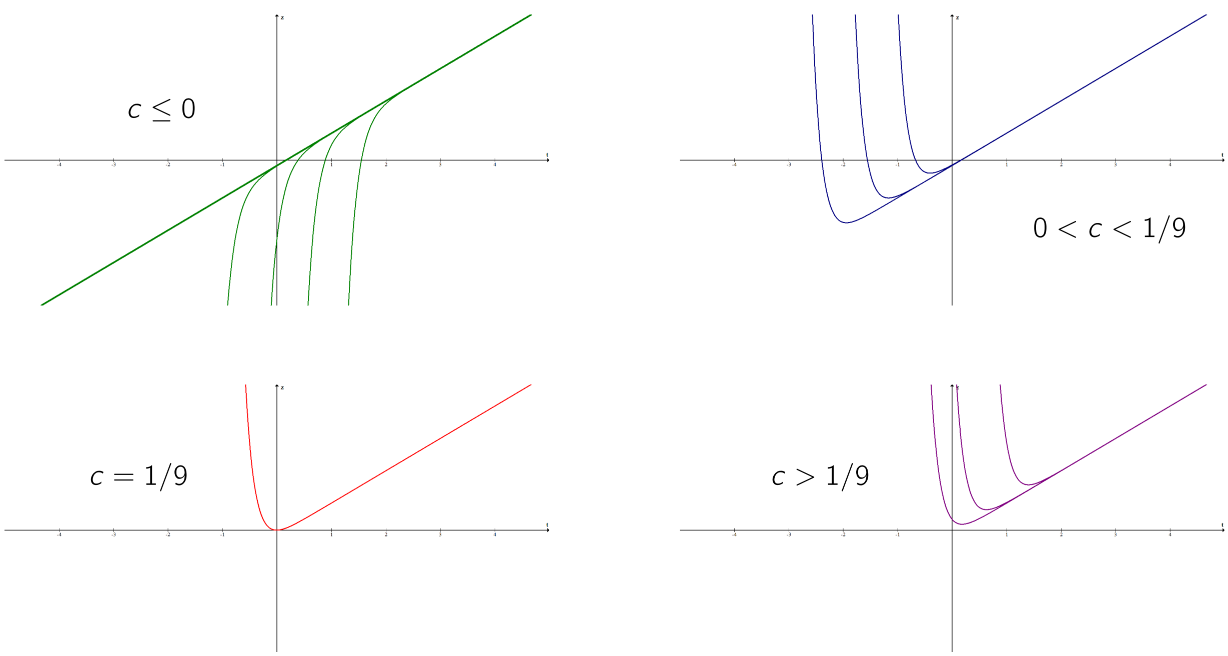
Per qualsiasi $c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$z_c(t) = \frac{2}{3}t - \frac{1}{9} + ce^{-6t}$$

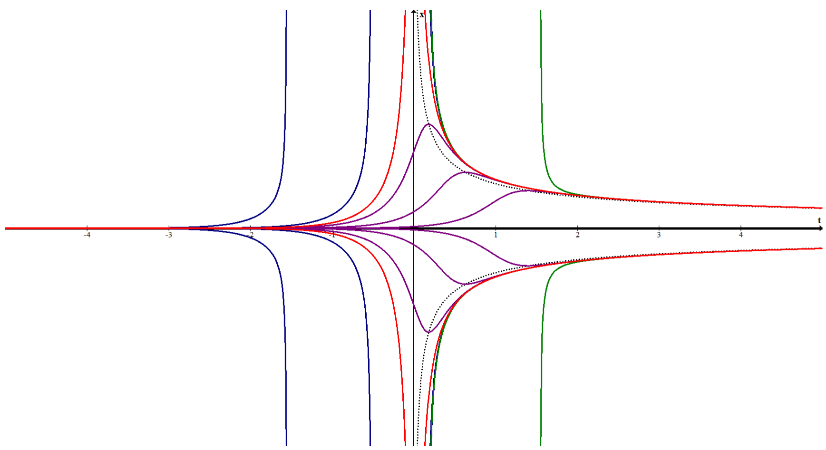
è definita in $\mathbb{R}$. A ciascuna soluzione di (1) corrispondono due o più soluzioni dell'equazione assegnata, che sono definite dalle uguaglianze

$$x_c^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}t - \frac{1}{9} + ce^{-6t}}}, \qquad x_c^-(t) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}t - \frac{1}{9} + ce^{-6t}}} \tag{2}$$

e i cui intervalli di esistenza sono determinati dall'insieme $\{t \in \mathbb{R} \,|\, z_c(t) > 0\}$.
Le figure qui sotto mostrano il grafico di z_c per alcuni valori di $c \in \mathbb{R}$:



A ciascuna delle funzioni z_c con $c \le 0$ corrispondono due soluzioni dell'equazione assegnata, definite come in (2), con intervallo di esistenza massimale del tipo $(t_c, +\infty)$. Noto che le soluzioni hanno un asintoto verticale in t_c e che t_c cresce tra $1/6$ e $+\infty$ al decrescere di c tra 0 e $-\infty$.
A ciascuna delle funzioni z_c con $c \in (0, 1/9)$ corrispondono due soluzioni dell'equazione assegnata, definite come in (2), con intervallo di esistenza massimale del tipo $(-\infty, t'_c)$, e due soluzioni con intervallo di esistenza massimale del tipo $(t''_c, +\infty)$. Noto che le soluzioni hanno asintoti verticali negli estremi finiti dei rispettivi intervalli di esistenza; inoltre, al crescere di c tra 0 e $1/9$, t'_c cresce tra $-\infty$ e 0, mentre t''_c decresce tra $1/6$ e 0.
Alla funzione $z_{1/9}$ corrispondono due soluzioni dell'equazione assegnata, definite come in (2), con intervallo di esistenza massimale $(-\infty, 0)$, e due soluzioni con intervallo di esistenza massimale $(0, +\infty)$. Noto che le soluzioni hanno asintoti verticali in $t = 0$.
A ciascuna delle funzioni z_c con $c > 1/9$ corrispondono due soluzioni dell'equazione assegnata, definite come in (2), con intervallo di esistenza massimale $\mathbb{R}$.
La figura qui sotto mostra il grafico di alcune soluzioni; osservo che le quattro soluzioni con asintoto verticale in $t = 0$ "separano" le soluzioni globali dell'equazione assegnata da quelle esplosive.



Prova scritta del 26 gennaio 2015 (quesiti 1 e 3)

1. La successione assegnata converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione costante $f(x) \equiv 1$. Fissato $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{(x+n)^2}{1+(x+n)^2} - 1 \right| = \frac{1}{1+(x+n)^2};$$

la funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ è crescente in $(-\infty, -n]$ e decrescente in $[-n, +\infty)$. Pertanto:

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(-n) - f(-n)| = 1$$

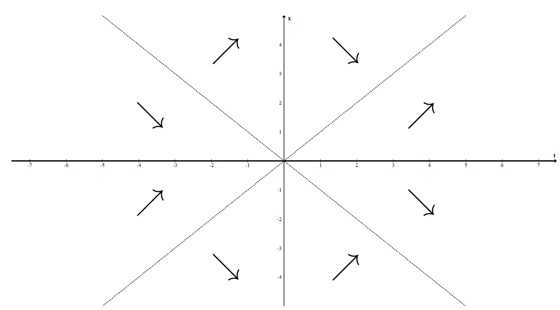
e dunque la successione assegnata non converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.
Fissato $a \in \mathbb{R}$, osservo che definitivamente risulta $-n < a$, da cui

$$\sup_{[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(a) - f(a)|.$$

Dato che la successione $\{|f_n(a) - f(a)|\}$ è infinitesima, deduco che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[a, +\infty)$.

3. Posto $f(t,x) := \dfrac{2tx}{t^2 - x^2}$, la funzione f è definita nell'insieme aperto $\Omega := \big\{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,|\, |x| \neq |t|\big\}$, in cui risulta di classe C^1; questo basta a garantire l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy con arbitraria condizione iniziale $(t_0, x_0) \in \Omega$. Il teorema di esistenza globale non è applicabile perché il dominio di f non è del tipo $I \times \mathbb{R}$, con I intervallo.

Osservo preliminarmente che l'equazione assegnata ammette le soluzioni di equilibrio $y_1(t) \equiv 0$, $t \in (-\infty, 0)$ e $y_2(t) \equiv 0$, $t \in (0, +\infty)$. Ogni altra soluzione assumerà valori solo strettamente positivi o solo strettamente negativi nel proprio intervallo di esistenza.
La funzione f si annulla anche per $t = 0$; l'asse verticale (privato dell'origine) è una zero-clina. Inoltre, dal segno di f deduco che le soluzioni hanno la monotonia indicata nella figura qui a lato.



L'equazione assegnata è di Manfredi. Posto $x(t) = tz(t)$ e sostituendo nell'equazione assegnata, deduco che la funzione z risolve l'equazione a variabili separabili

$$z' = \frac{1}{t}\,\frac{z(1+z^2)}{1-z^2}.$$

Separando le variabili ottengo

$$\left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1+z^2}\right) z' = \frac{1}{t}$$

da cui, integrando,

$$\ln \frac{|z|}{1+z^2} = \ln|t| + c' \qquad (c' \in \mathbb{R})$$

e quindi

$$\frac{|z|}{1+z^2} = c|t|$$

con $c \in (0, +\infty)$. Tornando alla variabile dipendente x ottengo

$$\frac{|x|}{t^2+x^2} = c$$

da cui

$$cx^2 - |x| + ct^2 = 0$$

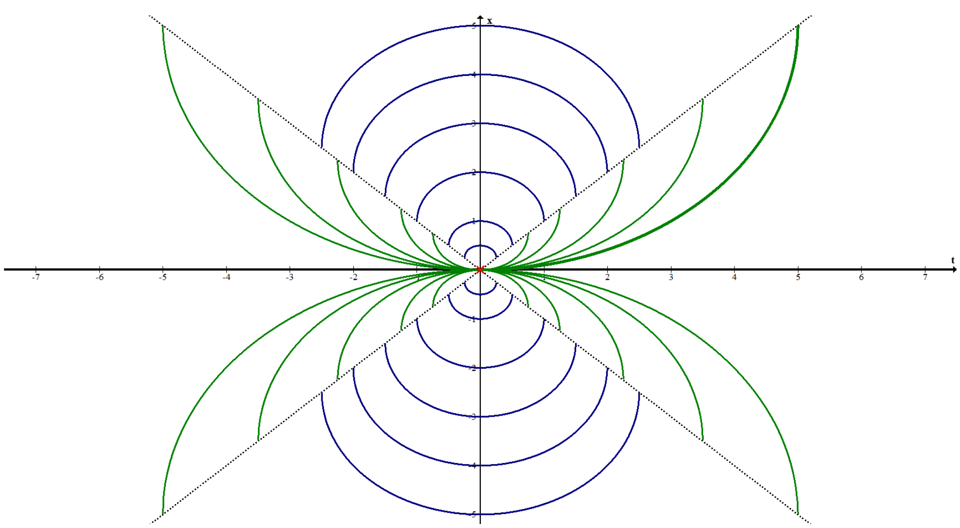
e, risolvendo rispetto a $|x|$,

$$|x| = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c^2t^2}}{2c}. \tag{1}$$

Scegliendo il segno $+$ in (1) ricavo le soluzioni

$$x_c^+(t) = \frac{1+\sqrt{1-4c^2t^2}}{2c},$$

definite in $(-1/(2c), 1/(2c))$, e le loro opposte. Osservo che l'intervallo di definizione è massimale; per $t \to 1/(2c)$, il grafico della soluzione x_c^+ tende a un punto che si trova sulla retta $x = t$ (dunque sul bordo di Ω); la tangente al grafico in prossimità di tale punto tende ad assumere posizione verticale. Analogo comportamento si osserva per $t \to -1/(2c)$. Alcune di queste soluzioni sono rappresentate in blu nella figura qui sotto.



Scegliendo il segno $-$ in (1) ricavo le soluzioni

$$x_c^-(t) = \frac{1-\sqrt{1-4c^2t^2}}{2c} \tag{2}$$

e le loro opposte. Osservo che la presenza della radice impone, come prima, la condizione $|t| < 1/(2c)$; come prima, per $t \to 1/(2c)$ il grafico della soluzione x_c^- tende a un punto che si trova sulla retta $x = t$ (dunque sul bordo di Ω); la tangente al grafico in prossimità di tale punto tende ad assumere posizione verticale. Analogo comportamento si osserva per $t \to -1/(2c)$. In aggiunta, osservo che per $t \to 0$ il grafico di x_c^- tende al punto $(0, 0)$ (dunque sul bordo di Ω); la tangente al grafico in prossimità di tale punto tende ad assumere posizione orizzontale. In corrispondenza, (2) determina due soluzioni, con rispettivi intevalli massimali di esistenza $(-1/(2c), 0)$ e $(0, 1/(2c))$. Alcune di queste soluzioni sono rappresentate in verde nella figura della pagina precedente.
Risolvo infine il problema di Cauchy assegnato. La discussione precedente indica che la soluzione è del tipo x_c^-, con intervallo di esistenza massimale $(0, 1/(2c))$. Per determinare c, sostituisco la condizione iniziale:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 36c^2}}{2c} = 1 \iff 1 - 2c = \sqrt{1 - 36c^2} \iff 40c^2 - 4c = 0$$

da cui, escludendo $c = 0$, ottengo $c = 1/10$. La soluzione cercata è $x(t) = 5(1-\sqrt{1 - t^2/25})$, definita in $(0, 5)$. Il grafico di x è rappresentato con un tratto più marcato nella figura della pagina precedente.

Prova scritta del 9 febbraio 2015 (quesiti 1 e 3)

1. Osservo che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{nx^2+e^{-nx}}{n+1}=\begin{cases} x^2 & x\in(0,+\infty)\\ 0 & x=0\\ +\infty & x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

e pertanto la successione assegnata converge puntualmente per $x\in(0,+\infty)$ alla funzione $f(x)=\ln(x^2)$, mentre diverge negativamente per $x=0$ e diverge positivamente per $x\in(-\infty,0)$.
Fisso $n\in\mathbb{N}$. Per $x\in(0,+\infty)$ risulta

$$f_n(x)-f(x)=\ln\left(\frac{nx^2+e^{-nx}}{n+1}\right)-\ln(x^2)=\ln\left(\frac{nx^2+e^{-nx}}{(n+1)x^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{1}{e^{nx}x^2}\right)\right).$$

Osservo che $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_n(x)-f(x)\big)=+\infty$; questo mi permette di escludere che $\{f_n\}$ converga uniformemente a f in un intorno destro di 0. (In alternativa, basta osservare che, ciascuna f_n è continua nell'intervallo chiuso $[0,+\infty)$; pertanto, se $\{f_n\}$ convergesse uniformemente in $(0,+\infty)$, dovrebbe convergere uniformemente in $[0,+\infty)$, in contrasto con il fatto che $\{f_n(0)\}$ diverge.)

Fisso $\delta\in(0,+\infty)$ e verifico se $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[\delta,+\infty)$.
Osservo che la funzione $x\in(0,+\infty)\mapsto e^{nx}x^2$ è strettamente crescente, poiché prodotto di funzioni strettamente crescenti e positive. Componendo con la funzione reciproco ottengo una funzione strettamente decrescente; aggiungendo la costante n e componendo con la funzione logaritmo naturale, che è strettamente crescente, deduco che la funzione $x\in(0,+\infty)\mapsto f_n(x)-f(x)$ è strettamente decrescente.
Pertanto:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[\delta,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|&=\max\left\{|f_n(\delta)-f(\delta)|\,,\,\left|\lim_{x\to+\infty}\big(f_n(x)-f(x)\big)\right|\right\}\\&=\max\left\{|f_n(\delta)-f(\delta)|\,,\,\left|\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right|\right\}.\end{aligned}$$

Poiché le successioni $\{f_n(\delta)-f(\delta)\}$ e $\left\{\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right\}$ sono infinitesime, ottengo

$$\sup_{x\in[\delta,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\to0\quad\text{per } n\to+\infty.$$

3. Posto $f(t,x):=x+\dfrac{e^{4t}}{x}$, la funzione f è definita nell'insieme aperto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, in cui risulta di classe C^1; questo basta a garantire l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy con arbitraria condizione iniziale $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Il teorema di esistenza globale non è applicabile perché il dominio di f non è del tipo $I\times\mathbb{R}$, con I intervallo.
La funzione f non si annulla mai, pertanto l'equazione assegnata non ammette soluzioni di equilibrio. Non potendo assumere il valore 0, ciascuna soluzione assume valori solo strettamente positivi o solo strettamente negativi nel proprio intervallo di esistenza; dal segno di f deduco che nel primo caso la soluzione è strettamente crescente, nel secondo caso è strettamente decrescente.

L'equazione assegnata è di Bernoulli. Moltiplicandone ambo i membri per $2x$ ottengo $2xx' = 2x^2 + 2e^{4t}$; posto $z(t) = x(t)^2$, la funzione z risolve l'equazione lineare del primo ordine $z' = 2z + 2e^{4t}$, il cui integrale generale è

$$e^{2t} \int e^{-2t} 2e^{4t} \, dt = e^{2t}\big(e^{2t} + c\big).$$

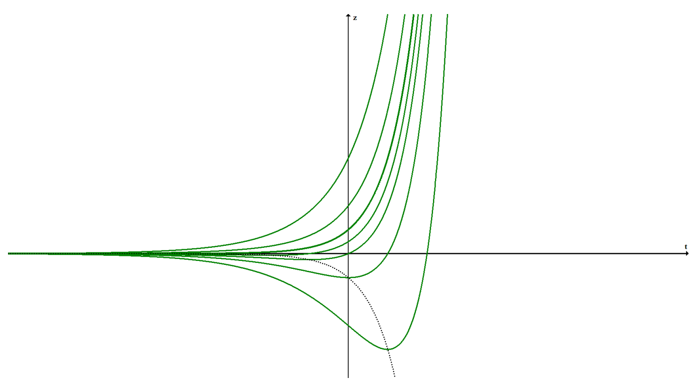
Per qualsiasi $c \in \mathbb{R}$, la funzione

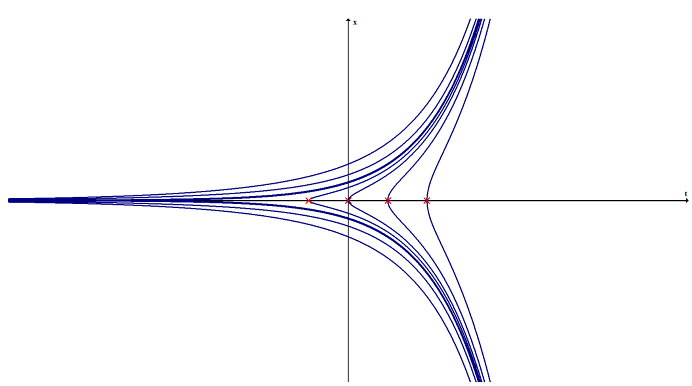
$$z_c(t) = e^{2t}\big(e^{2t} + c\big)$$

è definita in $\mathbb{R}$. A ciascuna di queste funzioni corrispondono due soluzioni dell'equazione assegnata, che sono definite dalle uguaglianze

$$x_c^+(t) = e^t\sqrt{e^{2t} + c}, \qquad x_c^-(t) = -e^t\sqrt{e^{2t} + c}$$

e i cui intervalli di esistenza coincidono con l'insieme $I_c := \{t \in \mathbb{R} \mid z_c(t) > 0\}$.
Per $c \in [0, +\infty)$ si ha $I_c = \mathbb{R}$; le soluzioni x_c^+ e x_c^- tendono a 0 per $t \to -\infty$ e divergono (come e^{2t} e $-e^{2t}$, rispettivamente) per $t \to +\infty$.
Per $c \in (-\infty, 0)$ si ha $I_c(t) = \big(\ln(\sqrt{-c}), +\infty\big)$. Per $t \to +\infty$ le soluzioni hanno lo stesso andamento del caso precedente. Per $t \to \ln(\sqrt{-c})$, x_c^+ e x_c^- tendono a 0 con derivata che tende a $+\infty$ e $-\infty$, rispettivamente; ne deduco che I_c è intevallo di esistenza massimale.
Le figure qui sotto mostrano il grafico di z_c (in verde) e di x_c^+ e x_c^- (in blu) per alcuni valori di $c \in \mathbb{R}$. Osservo che le soluzioni x_0^+ e x_0^- (disegnate con un tratto più marcato) "separano" le soluzioni globali dell'equazione assegnata da quelle esplosive.





Risolvo infine i problemi di Cauchy assegnati.
Imponendo che la funzione x_c^- assuma in $t = 0$ il valore -2 ottengo $c = 3$; la soluzione è quindi

$$\varphi(t) = -e^t \sqrt{e^{2t} + 3} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Imponendo che la funzione x_c^+ assuma in $t = 0$ il valore $1/2$ ottengo $c = -3/4$; la soluzione è quindi

$$\psi(t) = e^t \sqrt{e^{2t} - \frac{3}{4}} \qquad t \in \left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), +\infty \right).$$

Prova scritta del 23 giugno 2015 (quesiti 1 e 3)

1. Per $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$ pongo $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{\ln(1+x^{2n})}{n+3}$.

Per $|x| > 1$ la serie assegnata non converge perché non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza:

$$|f_n(x)| \sim \frac{\ln(x^{2n})}{n+3} = \frac{2n \ln|x|}{n+3} \longrightarrow 2\ln|x| \neq 0.$$

Per $|x| = 1$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2)}{n+3}$ che converge per il criterio di Leibniz; osservo che non converge assolutamente perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2)}{n+3}$ è asintotica a un multiplo della serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che diverge.

Per $|x| < 1$ si ha $|f_n(x)| \sim \dfrac{x^{2n}}{n+3} \leq x^{2n} = (x^2)^n$; dato che la serie geometrica di ragione x^2 converge, la serie assegnata converge assolutamente (per i criteri di confronto e confronto asintotico).

Ricapitolando: l'insieme di convergenza puntuale è $[-1, 1]$, l'insieme di convergenza assoluta è $(-1, 1)$.

L'ultima affermazione implica che la serie assegnata non può convergere totalmente in $(-1, 1)$; se lo facesse, essendo una serie di funzioni continue in $[-1, 1]$ convergerebbe totalmente in $[-1, 1]$ e quindi assolutamente in $[-1, 1]$, il che non è.

La serie assegnata converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-\rho, \rho]$, per qualsiasi $\rho \in (0, 1)$. Infatti, fissato un tale ρ, si ha

$$\sup_{[-\rho,\rho]} |f_n(x)| = |f_n(\rho)|,$$

e la serie di termine $|f_n(\rho)|$ converge per quanto detto sulla convergenza assoluta della serie assegnata.

Resta da stabilire se la serie assegnata converge uniformemente in tutto l'intervallo di convergenza puntuale. Osservo che per ogni $x \in [-1, 1]$, oltre a essere infinitesima, la successione $\{|f_n(x)|\}$ è decrescente. Infatti, per $|x| \leq 1$ la successione $\{x^{2n}\}$ è decrescente; componendo con la funzione $t \mapsto \ln(1 + t)$, crescente, si ottiene una successione decrescente (e non negativa); moltiplicando per la successione $\left\{\dfrac{1}{n+3}\right\}$, decrescente e positiva, si ottiene una successione decrescente.

Dunque, per ogni $x \in [-1, 1]$ la serie di termine $f_n(x)$ soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz. Pertanto, denotato con $R_n(x)$ il suo resto n-esimo, per ogni $x \in [-1, 1]$ si ha $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \dfrac{\ln(1+x^{2n+2})}{n+4}$, da cui

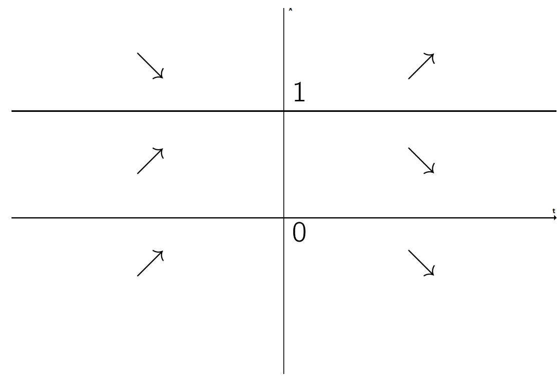
$$\sup_{[-1,1]} |R_n(x)| \leq \sup_{[-1,1]} \frac{\ln(1+x^{2n+2})}{n+4} = \frac{\ln(2)}{n+4} \longrightarrow 0.$$

A norma di definizione, la serie assegnata converge uniformemente in $[-1, 1]$.

3. Posto $f(t,x) := t\,x - \dfrac{t}{x^2} = t\,\dfrac{x^3-1}{x^2}$, la funzione f è definita nell'insieme aperto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, in cui risulta di classe C^1; questo basta a garantire l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy con arbitraria condizione iniziale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Il teorema di esistenza globale non è applicabile perché il dominio di f non è del tipo $I\times\mathbb{R}$, con I intervallo.

Osservo preliminarmente che l'equazione assegnata ammette la soluzione di equilibrio $x(t)\equiv 1$, $t\in\mathbb{R}$. Ogni altra soluzione assumerà nel proprio intervallo di esistenza solo valori strettamente maggiori di 1, oppure solo valori strettamente compresi tra 0 e 1, oppure solo valori strettamente minori di 0.

La funzione f si annulla per $t=0$; l'asse verticale (privato dell'origine) è una zeroclina. Inoltre, dal segno di f deduco che le soluzioni hanno la monotonia indicata nella figura qui a lato.



L'equazione assegnata è sia di Bernoulli che a variabili separabili. La risolvo per separazione delle variabili, supponendo $x(t)\neq 1$:

$$\frac{x(t)^2}{x(t)^3-1}\,x'(t) = t.$$

Dato che

$$\int \frac{x(t)^2}{x(t)^3-1}\,x'(t)dt = \frac{1}{3}\int \frac{3x(t)^2}{x(t)^3-1}\,x'(t)dt = \frac{1}{3}\ln\left|x(t)^3-1\right| + c_1$$

e

$$\int t\,dt = \frac{1}{2}\,t^2 + c_2,$$

ottengo

$$\ln\left|x(t)^3-1\right| = \frac{3}{2}\,t^2 + c'' \qquad (c''\in\mathbb{R})$$

da cui

$$\left|x(t)^3-1\right| = c'\,e^{3t^2/2} \qquad (c'\in(0,\infty))$$

quindi

$$x(t)^3 = 1 + c\,e^{3t^2/2} \qquad (c\in\mathbb{R}^*)$$

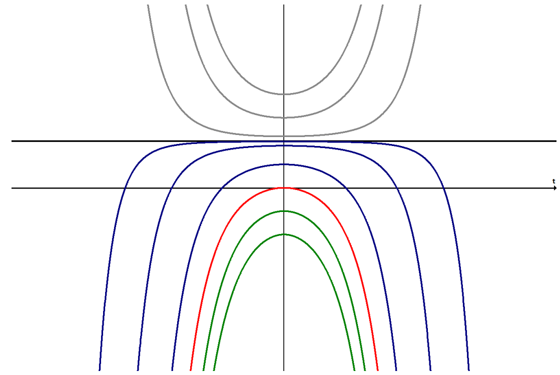
e infine

$$x(t) = \sqrt[3]{1+c\,e^{3t^2/2}} \qquad (c\in\mathbb{R}^*). \tag{1}$$

Osservo che ponendo $c=0$ in (1) otterrei nuovamente la soluzione di equilibrio.

Per $c\in\mathbb{R}^*$, la funzione definita in (1) è accettabile come soluzione dell'equazione assegnata se e solo se assume valori diversi da 0.

Considero la funzione $g_c(t) = 1 + c\, e^{3t^2/2}$, con $t \in \mathbb{R}$. La figura qui a lato mostra il grafico di g_c per alcuni valori di c. In particolare, si vede che g_c è strettamente positiva in $\mathbb{R}$ per $c > 0$ (grafici in grigio); è strettamente negativa in $\mathbb{R}$ se $c < -1$ (grafici in verde); si annulla in $t = 0$ per $c = -1$ (grafico in rosso); si annulla in $\pm\bar{t}_c$, con $\bar{t}_c := \sqrt{\frac{2}{3} \ln\left(-\frac{1}{c}\right)}$, per $c \in (-1, 0)$ (grafici in blu).

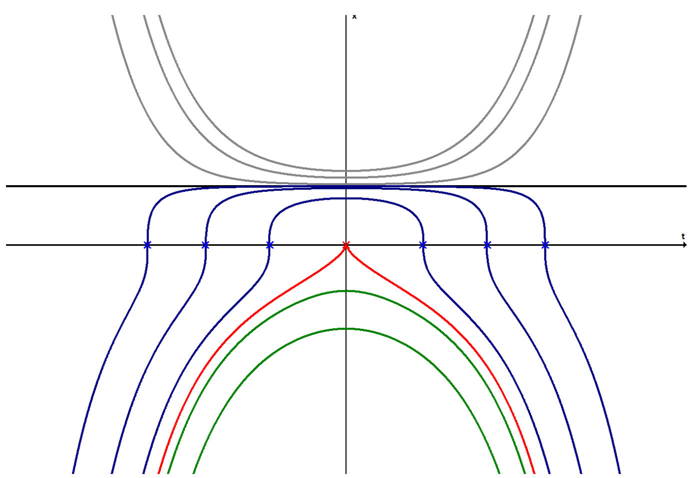


Dalle proprietà di g_c deduco le proprietà delle soluzioni dell'equazione assegnata.

Per $c \in (0, +\infty)$ la funzione definita in (1) è soluzione globale dell'equazione assegnata. Essa diverge positivamente per $t \to \pm\infty$. Le soluzioni corrispondenti ad alcuni valori di $c \in (0, +\infty)$ sono rappresentate in grigio nella figura in basso. Noto che al crescere di c il grafico della soluzione corrispondente si allontana dalla retta di equazione $x = 1$.

Per $c \in (-\infty, -1)$ la funzione definita in (1) è soluzione globale dell'equazione assegnata. Essa diverge negativamente per $t \to \pm\infty$. Le soluzioni corrispondenti ad alcuni valori di $c \in (-\infty, -1)$ sono rappresentate in verde nella figura in basso. Noto che al decrescere di c il grafico della soluzione corrispondente si allontana dalla retta di equazione $x = 0$.

Per $c = -1$ la funzione definita in (1) corrisponde a due soluzioni u e v dell'equazione assegnata, con intervalli di esistenza $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ rispettivamente. Le soluzioni divergono negativamente per $t \to -\infty$ e $t \to +\infty$, rispettivamente. Per $t \to 0$ entrambe le soluzioni tendono a 0; inoltre, u' diverge positivamente, mentre v' diverge negativamente. Le due soluzioni sono rappresentate in rosso nella figura qui sotto.



Per $c \in (-1, 0)$ la funzione definita in (1) corrisponde a tre soluzioni u_c, w_c e v_c dell'equazione assegnata, con intervalli massimali di esistenza $(-\infty, -\bar{t}_c)$, $(-\bar{t}_c, \bar{t}_c)$ e $(\bar{t}_c, +\infty)$ rispettivamente. Le soluzioni u_c e v_c hanno valori strettamente negativi e divergono per $t \to -\infty$ e $t \to +\infty$, rispettivamente. Nell'estremo finito del proprio dominio, sia u_c che v_c tendono a 0; inoltre, u_c' diverge positivamente, mentre v_c' diverge negativamente. La soluzione w_c ha valori strettamente positivi e tende a zero agli estremi del proprio dominio; la derivata w_c' diverge positivamente per $t \to -\bar{t}_c$ e negativamente per $t \to \bar{t}_c$. Le soluzioni corrispondenti ad alcuni valori di $c \in (-1, 0)$ sono rappresentate in blu nella figura della pagina precedente. Noto che al crescere di c tra -1 e 0 i punti $-\bar{t}_c$ e $\bar{t}_c$ si allontanano dal punto $t = 0$.

Risolvo i problemi di Cauchy assegnati.
Imponendo la condizione iniziale $x(0) = -1$ in (1) ottengo $-1 = \sqrt[3]{1+c}$ da cui $-1 = 1 + c$ e quindi $c = -2$; la soluzione corrispondente è

$$x(t) = \sqrt[3]{1 - 2\, e^{3t^2/2}}\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $x(0) = 1/2$ in (1) ottengo $\frac{1}{2} = \sqrt[3]{1+c}$ da cui $\frac{1}{8} = 1 + c$ e quindi $c = -\frac{7}{8}$; la soluzione corrispondente è

$$x(t) = \sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}\, e^{3t^2/2}}\,, \qquad t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3} \ln\left(\frac{8}{7}\right)}, \sqrt{\frac{2}{3} \ln\left(\frac{8}{7}\right)} \right).$$

Imponendo la condizione iniziale $x(0) = 2$ in (1) ottengo $2 = \sqrt[3]{1+c}$ da cui $8 = 1 + c$ e quindi $c = 7$; la soluzione corrispondente è

$$x(t) = \sqrt[3]{1 + 7\, e^{3t^2/2}}\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

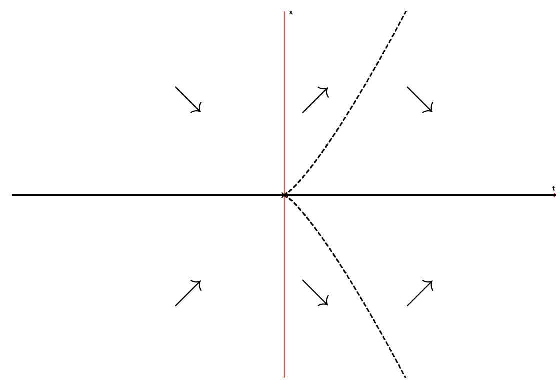
Prova scritta del 7 luglio 2015 (quesito 3)

Avvertenza: la soluzione proposta contiene alcune considerazioni di carattere generale che non erano richieste a coloro che hanno sostenuto la prova scritta.

Posto $f(t,x) := \dfrac{x}{t} - \sqrt[5]{x}$, la funzione f è definita nell'insieme aperto $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, in cui risulta continua. La derivata parziale di f rispetto a x è definita e continua in $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, e questo assicura che f è localmente lipschitziana rispetto a x, uniformemente in t, in $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$; d'altra parte, come è noto, la funzione $x \mapsto \sqrt[5]{x}$ non è lipschitziana in alcun intorno di $x = 0$. In conclusione, il teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy con condizione iniziale (t_0, x_0) si applica se e solo se $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$; per $x_0 = 0$ l'unicità locale non è garantita.

Il dominio di f è unione delle due "strisce" $S_- := (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ e $S_+ := (0, +\infty) \times \mathbb{R}$; tuttavia, il teorema di esistenza e unicità globale non è applicabile in maniera diretta in ciascuna striscia perché f non è localmente lipschitziana rispetto a x.

La funzione $x(t) \equiv 0$ risolve l'equazione assegnata sia in $(-\infty, 0)$ che in $(0, +\infty)$. Le curve $x = t^{5/4}$ e $x = -t^{5/4}$ (con $t \in (0, +\infty)$) sono zero-cline. Dal segno di f deduco che le soluzioni hanno la monotonia indicata nella figura qui a lato.



L'equazione assegnata è di Bernoulli. Posto $z(t) = x(t)^{4/5}$, la funzione z risolve l'equazione lineare del primo ordine $z' = \dfrac{4}{5t} z - \dfrac{4}{5}$, il cui integrale generale è

$$|t|^{4/5} \int |t|^{-4/5} \left(-\frac{4}{5}\right) dt = t^{4/5} \int t^{-4/5} \left(-\frac{4}{5}\right) dt = t^{4/5} \left(-4t^{1/5} + c\right) = -4t + ct^{4/5},$$

con $c \in \mathbb{R}$. In corrispondenza, l'equazione assegnata ha soluzioni definite dalle uguaglianze

$$x_c^{\pm}(t) = \pm \left(-4t + ct^{4/5}\right)^{5/4} = \pm |t| \left(-4t^{1/5} + c\right)^{5/4}. \tag{1}$$

Gli intervalli di esistenza delle soluzioni sono determinati dalle condizioni $t \neq 0$ e $-4t^{1/5} + c \geq 0$; quest'ultima equivale a $t \leq (c/4)^5 =: \bar{t}_c$.

Nel seguito descrivo le soluzioni non negative dell'equazione assegnata; le proprietà delle rispettive opposte si ottengono per simmetria.

Per $c \in (-\infty, 0)$ la funzione x_c^+ risolve l'equazione assegnata in $(-\infty, t_c]$. Il suo grafico si trova nel secondo quadrante, quindi x_c^+ è decrescente. Osservo che x_c^+ diverge positivamente per $t \to -\infty$, mentre assume valore 0 in $\bar{t}_c$, con derivata uguale a 0. Le soluzioni x_c^+ e x_c^- sono rappresentate in grigio nella figura della pagina seguente.

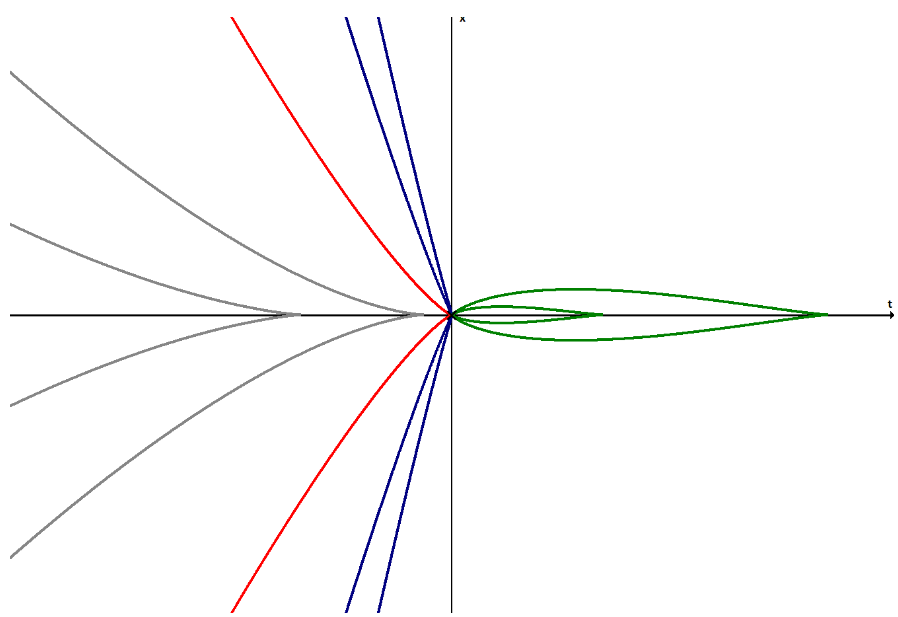
Noto che queste soluzioni possono essere prolungate a destra di $\bar{t}_c$, definendo le soluzioni massimali

$$u_c^{\pm}(t) = \begin{cases} x_c^{\pm}(t) & t \in (-\infty, \bar{t}_c], \\ 0 & t \in (\bar{t}_c, 0). \end{cases}$$

Per $c = 0$ la funzione x_0^+ risolve l'equazione assegnata in $(-\infty, 0)$ ed è pertanto soluzione massimale. Essa è decrescente; diverge positivamente per $t \to -\infty$; tende a 0 per $t \to 0$, e lo stesso vale per la sua derivata. Le soluzioni x_0^+ e x_0^- sono rappresentate in rosso nella figura in basso.

Per $c \in (0, +\infty)$ la funzione x_c^+ determina due soluzioni dell'equazione assegnata, con intervalli di esistenza $(-\infty, 0)$ e $(0, \bar{t}_c]$, rispettivamente. La restrizione di x_c^+ a $(-\infty, 0)$ è soluzione massimale dell'equazione assegnata; essa è decrescente; diverge positivamente per $t \to -\infty$; tende a 0 per $t \to 0$, mentre la sua derivata tende a $-c^{5/4}$ (l'ultima affermazione si deduce facilmente dall'equazione differenziale). Queste soluzioni e le loro opposte sono rappresentate in blu nella figura in basso.
Denoto con y_c^+ la restrizione di x_c^+ a $(0, \bar{t}_c]$. Osservo che y_c^+ tende a 0 per $t \to 0$, mentre la sua derivata tende a $c^{5/4}$. In un intorno destro di $t = 0$, y_c^+ è crescente; dato che $y_c^+(\bar{t}_c) = 0$, il grafico di y_c^+ interseca la zero-clina $x = t^{5/4}$ in corrispondenza di un certo t_c^*; in $[t_c^*, \bar{t}_c]$ la funzione y_c^+ è decrescente. Queste soluzioni e le loro opposte sono rappresentate in verde nella figura in basso.
Dato che $y_c^{\pm}$ e la sua derivata assumono valore 0 in $\bar{t}_c$, posso prolungare a destra di $\bar{t}_c$ ottenendo le soluzioni massimali

$$u_c^{\pm}(t) = \begin{cases} y_c^{\pm}(t) \ (= x_c^{\pm}(t)) & t \in (0, \bar{t}_c], \\ 0 & t \in (\bar{t}_c, +\infty). \end{cases}$$



Risolvo infine i problemi di Cauchy assegnati.
Imponendo la condizione iniziale $x(-1) = 1$ ottengo $c = -3$. La soluzione massimale corrispondente è quindi

$$\varphi(t) = \begin{cases} -t\Big(-4t^{1/5} - 3\Big)^{5/4} & t \in \big(-\infty, (-3/4)^5\big]\,, \\ 0 & t \in \big((-3/4)^5, 0\big)\,. \end{cases}$$

Imponendo la condizione iniziale $x(-1/32) = 1$ ottengo $c = 14$. Come discusso in generale, a tale valore di c corrispondono due diverse soluzioni dell'equazione assegnata; la soluzione del problema di Cauchy considerato è quella il cui intervallo di definizione contiene $t_0 = -1/32$, cioè

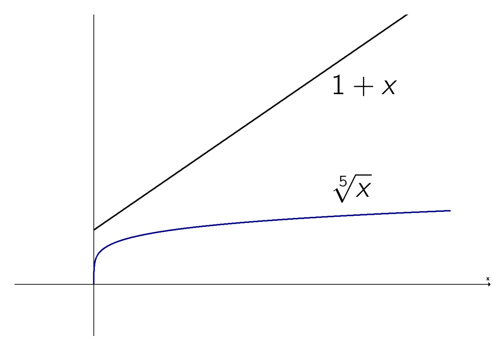
$$\varphi(t) = -t\Big(-4t^{1/5} + 14\Big)^{5/4} \qquad t \in (-\infty, 0).$$

Imponendo la condizione iniziale $x(1) = 1$ ottengo $c = 5$. A tale valore di c corrispondono due diverse soluzioni dell'equazione assegnata; la soluzione del problema di Cauchy considerato è quella il cui intervallo di definizione contiene $t_0 = 1$, cioè

$$\varphi(t) = \begin{cases} t\Big(-4t^{1/5} + 5\Big)^{5/4} & t \in \big(0, (5/4)^5\big]\,, \\ 0 & t \in ((5/4)^5, +\infty). \end{cases}$$

Nota

Risolvendo i problemi di Cauchy assegnati ho trovato soluzioni massimali *globali*, cioè definite in $(-\infty, 0)$ oppure in $(0, +\infty)$. Ciò era prevedibile, in quanto la funzione f soddisfa la condizione di sublinearità sia in $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ che in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Infatti: fissato $[a, b] \subset (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, per ogni $t \in [a, b]$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta



$$|f(t, x)| \le \frac{|x|}{|t|} + \sqrt[5]{|x|} \le \frac{|x|}{\min\{|a|, |b|\}} + \big(1 + |x|\big) = 1 + \left(\frac{1}{\min\{|a|, |b|\}} + 1\right)|x|.$$