Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica III

Anno accademico 2017/18

Si risolvano i problemi 1, 2 e uno a scelta tra 3 e 4.

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) = \dfrac{(x^2 - n)^2}{n^2 + x^4}$.

   (a) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}$.

   (b) Se è lecito, si applichi il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\, dx$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$(-1)^n \frac{(n + x)\, e^{n\,(1-x)}}{n^2 + 1} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}).$$

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

   (a) Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di termine f_n.

   (b) Si determini la somma della serie di termine f_n.
   (Suggerimento: si utilizzi il teorema di derivazione termine a termine e si tenga presente la serie di Taylor di centro 0 della funzione $x \mapsto \ln(1 - x)$.)

4. Si utilizzi la serie di Taylor di centro 0 della funzione esponenziale per determinare un valore approssimato di $1/\sqrt[3]{e}$ con un errore inferiore a 10^{-4}.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica III

Anno accademico 2017/18

1. Si consideri l'equazione differenziale $x' = \dfrac{1-e^x}{\sqrt{t}}$ (con $x = x(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino esplicitamente le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza e descrivendone il comportamento agli estremi di tali intervalli.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa.

2. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = -13\,x + 10\,y + 7\,z, \quad y' = -7\,x + 6\,y + 5\,z, \quad z' = 3\,x - 6\,y - 9\,z$$

   con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
   Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni che tendono a $(0, 0, 0)$ per $t \to +\infty$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

10 gennaio 2018

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni di termine
$$\frac{n}{n+x^{2n}} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.)$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$\frac{n^2+3^{-n}}{n^3+2}\big(e^x-2\big)^n \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.)$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = \dfrac{(e^t-1)\,(x^2+1)}{\arctan(x)}$ (con $x = x(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino esplicitamente le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza e descrivendone il comportamento agli estremi di tali intervalli.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = x + y - 2\,z, \quad y' = x + y + z, \quad z' = x - y$$
con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni periodiche.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

22 gennaio 2018

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni di termine

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos(3nx) & |x| \leq \dfrac{\pi}{2\,n}, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$(-1)^n \, \frac{\ln(1 + |x|^n)}{n} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.)$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = 4\,t\,\sqrt{x}\,(1 - \sqrt{x})$ (con $x = x(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino esplicitamente le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza e descrivendone il comportamento agli estremi di tali intervalli.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = 3\,x - y + e^t, \quad y' = -x + 3\,y$$

con $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

5 febbraio 2018

1. Si utilizzi, giustificandone la applicabilità, il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-2}^{1}\frac{n\,e^{-x^2/n}}{n+1}\,dx.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x)=\frac{x^n(x^2-3)^n}{(3^n+2)\,n}\qquad\qquad (x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}^*).$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x'=-\dfrac{6}{t}\,x-2\,t^2\,x^{3/2}$ $\quad$ (con $x=x(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determini esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale $x(t_0)=4$, con $t_0\in\{-1,1\}$, specificandone l'intervallo di esistenza e descrivendone il comportamento agli estremi di tale intervallo.
   (d) Si tracci il grafico delle soluzioni determinate al punto precedente.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x'=x-y+2\,z,\quad y'=-11\,x+y+2\,z,\quad z'=-x+y+z$$
con $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni limitate per $t\to+\infty$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

19 febbraio 2018

1. Si stabilisca se si può applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata alla successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{e^{-n x^2}}{\sqrt{n+1}} \qquad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{\ln\left(1 + e^{-n x^2}\right)}{n} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = -\dfrac{x}{3\,t} + \dfrac{\sqrt{t}}{x^2}$ (con $x = x(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino esplicitamente le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza e descrivendone il comportamento agli estremi di tali intervalli.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = -x - 3\,y + 2\,z, \quad y' = x - z, \quad z' = x - 2\,y$$

con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni che tendono alla soluzione di equilibrio per $t \to +\infty$.