Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

19 dicembre 2014

Per la prova di esonero risolvere i quesiti 3,4,5.
Per la prova di esame risolvere i quesiti 1,2 e due quesiti a scelta tra i quesiti 3,4,5.

1. Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine $f_n(x) = \dfrac{n\,x e^{-nx^2}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$.

2. Sia f la funzione periodica di periodo 2, tale che $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (0,1], \\ (x-2)^3 & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$

   Determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a f e discuterne la convergenza puntuale e uniforme in base alla teoria.

3. Data l'equazione differenziale $x' = (2t-1)(e^x - 1) \quad (x = x(t))$,

   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale;

   (b) determinare le soluzioni e tracciare il grafico di qualche soluzione rappresentativa;

   (c) risolvere il problema di Cauchy con condizione iniziale $x(1) = \ln(2)$, esplicitando l'intervallo di esistenza della soluzione.

4. Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

   $$x' = 3x+2y+3z, \quad y' = x-z, \quad z' = -x-2y-z \qquad (\text{con } x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)).$$

5. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

   $$x''' + x' + 2x = (3t+1)e^{2t} \qquad (x = x(t)).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

12 gennaio 2015

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \arcsin\left(\frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

2. Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,2^n + 2}{4n^2} \left(\frac{3x}{x^4+1}\right)^n .$$

3. Data l'equazione differenziale $x' = 3x - 2tx^3 \quad (x = x(t))$,

   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale;

   (b) determinare le soluzioni e tracciare il grafico di qualche soluzione rappresentativa.

4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$t^2x'' - 2tx' + 2x = 3t^2 \qquad (x = x(t)).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

26 gennaio 2015

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{(x+n)^2}{1+(x+n)^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π, dispari in $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, tale che $f_\alpha(0) = 0$ e $f_\alpha(x) = x^\alpha$ per $x \in (0, \pi]$.

   (a) Discutere in base alla teoria la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata a f_α, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a f_2.

3. Data l'equazione differenziale $x' = \dfrac{2tx}{t^2 - x^2} \quad (x = x(t))$,

   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale;

   (b) determinare le soluzioni e tracciare il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziandone la monotonia e l'andamento agli estremi dei rispettivi intervalli di esistenza;

   (c) risolvere il problema di Cauchy con condizione iniziale $x(3) = 1$.

4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x''' - 4\,x'' + 9\,x' - 10\,x = 3\sin(2t) \qquad (x = x(t)).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

9 febbraio 2015

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{nx^2 + e^{-nx}}{n+1}\right), \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

2. Sia f la funzione periodica di periodo 4 tale che $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in [0,2), \\ 4 - \dfrac{x}{2} & \text{se } x \in [2,4). \end{cases}$

   (a) Discutere in base alla teoria la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata a f.

   (b) Determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a f.

3. Data l'equazione differenziale $x' = x + \dfrac{e^{4t}}{x} \quad (x = x(t))$,

   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale;

   (b) determinare le soluzioni e tracciare il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziandone la monotonia e l'andamento agli estremi dei rispettivi intervalli di esistenza;

   (c) risolvere il problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$, con $x_0 \in \{-2, 1/2\}$.

4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$t^3\, x''' - t^2\, x'' + t\, x' = 2\, t^3 + 1 \qquad (x = x(t)).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

9 giugno 2015

1. Studiare la convergenza puntuale, uniforme, assoluta e totale della serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2-3)^n e^{nx}}{e^{2n}+1}\,.$$

2. Sia f la funzione periodica di periodo 2 tale che
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1), \\ x & x \in [1,2). \end{cases}$$
Discutere in base alla teoria la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata a f. Utilizzare lo sviluppo di Fourier di f per determinare $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

3. Data l'equazione differenziale $x' = \dfrac{x}{t} - 3\,x^2 \quad (x = x(t))$,
   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale;
   (b) determinare le soluzioni e tracciare il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziandone la monotonia e l'andamento agli estremi dei rispettivi intervalli di esistenza;
   (c) risolvere il problema di Cauchy con condizione iniziale $x(1) = x_0$ con $x_0 \in \{-1, 1/2\}$.

4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$t^2\,x'' - 2\,t\,x' = \ln(t) \qquad (x = x(t)).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

23 giugno 2015

1. Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+x^{2n})}{n+3} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Sia f la funzione periodica di periodo 3 tale che

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \in [-1,1], \\ 1 & x \in (1,2). \end{cases}$$

Determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a f e discuterne la convergenza puntuale e uniforme in base alla teoria.

3. Data l'equazione differenziale $x' = t\,x - \dfrac{t}{x^2} \quad (x = x(t))$,

   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale;

   (b) determinare le soluzioni e tracciare il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziandone la monotonia e l'andamento agli estremi dei rispettivi intervalli di esistenza;

   (c) risolvere il problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$ con $x_0 \in \{-1, 1/2, 2\}$.

4. Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = x - y, \quad y' = 2x + y + z, \quad z' = -y + z \qquad (\text{con } x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

7 luglio 2015

1. Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2 tale che

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x(\alpha - x) & x \in [0,1), \\ 0 & x \in [1,2). \end{cases}$$

   (a) Discutere in base alla teoria la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata a f_α, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinare esplicitamente la serie di Fourier associata a f_3.

3. Data l'equazione differenziale $x' = \dfrac{x}{t} - \sqrt[5]{x} \quad (x = x(t))$,

   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale;

   (b) risolvere il problema di Cauchy con condizione iniziale $x(t_0) = 1$, per $t_0 \in \{-1, -1/32, 1\}$;

   (c) tracciare il grafico di ciascuna delle soluzioni determinate al punto (b), evidenziandone il comportamento agli estremi dei rispettivi intervalli di esistenza.

4. Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = x - 2y + z, \quad y' = x - z, \quad z' = x + y + z \qquad (\text{con } x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

16 settembre 2015

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{(n+x)^3}{n^3+1}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

2. Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^{-n}}{n^2+1} \big(1 - \ln(x)\big)^n.$$

3. Data l'equazione differenziale $x' = \dfrac{x \ln(t)}{\ln(x)}$ $\quad (x = x(t))$,

   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale;

   (b) determinare le soluzioni, descrivendone *qualitativamente* gli intervalli di esistenza;

   (c) tracciare il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziandone la monotonia e l'andamento agli estremi dei rispettivi intervalli di esistenza.

4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x''' - x'' + 2x = t + \cos(t) \qquad (x = x(t)).$$