Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica III**

Anno accademico 2023/24

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$, sia $f_n(x) = \ln\left(1 + x^2 + x^{2n}\right)$.

   (a) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}$.

   (b) Denotata con f la funzione limite di $\{f_n\}$ e posto $g_n := f_n - f$, si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine g_n.

2. Si determinino l'insieme di convergenza e la somma della serie di potenze di centro 0 e coefficienti

$$c_0 = c_1 = 0\,, \qquad c_n = \frac{1}{n(n-1)} \text{ per } n \geq 2\,.$$

   [Suggerimento: utilizzare il teorema di derivazione termine a termine.]

3. Si stabilisca se la successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{x}{3 + n\,x^4} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in [-1, 1]$$

   converge negli spazi normati $\left(C^0([-1,1],\mathbb{R}),\ \|\cdot\|_{C^0}\right)$ e $\left(C^1([-1,1],\mathbb{R}),\ \|\cdot\|_{C^1}\right)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica III** – 6 novembre 2023

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \ln\left(1 + x^2 + x^{2n}\right) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

2. Denotata con f la funzione limite della successione del quesito 1 e posto $g_n := f_n - f$, si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine g_n.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{t\,y + y^2}{t^2}$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4a. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2022/2023**

Si determinino gli estremi globali della funzione definita ponendo $f(x, y) = (x - y)^2 - \dfrac{1}{4}(x^4 + y^4)$ nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$.

4b. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022**

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 6\,y' + 13\,y = \cos(2\,t)\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = -1\,.$$

4c. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2020/2021 o precedenti**

Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = x, \quad y' = x + 3\,y + 2\,z, \quad z' = 2\,x + 3\,y + 4\,z\,.$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica III**

Anno accademico 2023/24

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{y^2 - 2\,t\,y}{t^2}$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

   (e) Si determinino le soluzioni dei problemi di Cauchy di rispettive condizioni iniziali $y(1) = -1$, $y(1) = 2$, $y(1) = 4$.

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{t^2 - 1} + \sqrt{1 + y^2} \\ y(0) = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

   Non si richiede di *risolvere* il problema di Cauchy, ma di rispondere alle seguenti domande motivando le risposte in base alla teoria e a opportune considerazioni qualitative.

   (a) È possibile determinare *a priori* l'intervallo di definizione della soluzione, al variare di α in $\mathbb{R}$?

   (b) (Facoltativo) È possibile prevedere il comportamento della soluzione agli estremi dell'intervallo di esistenza?

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica III** – 10 gennaio 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{n^2+3}{e^{n\,x}+n^2} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

2. Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n\, n\, e^{n\,x}}{n^2+3} \qquad (n \in \mathbb{N}^* \text{ e } x \in \mathbb{R})$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{3\,t^2\,y^3}{y+1}$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita o implicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4a. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2022/2023**

Si determinino gli estremi globali della funzione $f(x,y) = x^2(x\,y-1)$ nell'insieme delimitato dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla retta di equazione $y = 1$.

4b. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022 o precedenti**

Si determini la soluzione dell'equazione differenziale

$$y''' + 6\,y'' + 16\,y' + 16\,y = (4\,t+1)\,e^{-2\,t}.$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica III** – 24 gennaio 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + x^{2n}) - n}{n} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

2. Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = (-1)^n \arctan\left(\frac{x^2}{x^2 + n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}^* \text{ e } x \in \mathbb{R})$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{t^3\, y^2}{\ln(y)}$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma implicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4 **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2022/2023**

Si determinino gli estremi globali della funzione definita ponendo $f(x, y) = 1 + x + 2y$ nell'insieme $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \leq 0,\ x - y \leq 1\right\}$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica III** – 7 febbraio 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo
$$f_n(x) = \frac{(n+1)\, e^{-n\, x^2}}{n+3}$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

2. Denotata con f la funzione limite della successione del quesito 1 e posto $g_n := f_n - f$, si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine g_n.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = y + \dfrac{1-t^2}{y}$.
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4 **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2022/2023**

Si determinino gli estremi globali della funzione definita ponendo $f(x,y) = x^2 - 3\,y^2 - 2\,x + 2\,y$ nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica III** – 22 febbraio 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo
$$f_n(x) = \exp\Big(\frac{n\,x}{n^2 + x^2}\Big)$$
per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$.

2. Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = \frac{x\,(e^{-n\,x} + 1)}{(n+1)(n+2)},$$
con $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{y + y^4}{t^2 + 1}$.
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determini in forma esplicita la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$, specificandone l'intervallo di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico della soluzione ottenuta evidenziandone il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4a. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2022/2023**

Si determinino e classifichino i punti di estremo locale della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo
$$f(x, y) = e^{2\,x+y}(x^2 - y).$$

4b. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022 o precedenti**

Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare
$$y''' + 2\,y'' + y' = 3(t^2 + e^{2\,t}).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica III** – 10 giugno 2024

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{\pi\, n\, x}{n^2 x^2 + 1}\right) \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = n^2 \ln\left(1 + \frac{x^{2n}}{n^3}\right) \qquad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{y - y^4}{t + 1}$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone qualitativamente gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4a. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2022/2023**

Si determinino gli estremi globali della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x, y) = x^2\,(x + y - y^2)$ nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$.

4b. **Solo per chi fa riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022 o precedenti**

Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin(t)} \qquad t \in (0, \pi).$$