Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica III

Anno accademico 2022/23

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \,]0, +\infty[$, sia $f_n(x) = \ln\left(\dfrac{n\,x^2}{n+x}\right)$.
   (a) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}$.
   (b) Si stabilisca se $\{f_n\}$ soddisfa le ipotesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \arcsin\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right).$$

3. Si determini un valore approssimato con un errore minore di 10^{-3} dell'integrale

$$\int_0^2 \frac{e^{-x^2}-1}{x}\,dx\,.$$

4. Si stabilisca quali tra le funzioni definite in $\mathbb{R}$ ponendo

$$f_1(x) = \arctan(x) \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} 1 - e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

appartengono all'insieme $\left\{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\right\}$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

3 novembre 2022

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definite ponendo

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{n\,x^2}{n+x}\right)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \,]0, +\infty[$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \arcsin\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right).$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \sin(t)\,(y^2 - 2\,y)$, con $y = y(t)$ e $t \in \,]-\pi, \pi[$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

Si risolva <u>uno a scelta</u> tra i seguenti quesiti:

(4a) Si risolva l'equazione differenziale $t^2\,y'' - 2\,t\,y' = \ln(t)$, con $y = y(t)$.

(4b) Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = x - 2y + 2z, \quad y' = -x - z, \quad z' = x - y$$

con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica III

Anno accademico 2022/23

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si consideri l'equazione differenziale $y' = t^2 y - t^5 y^4$, con $y = y(t)$.
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

2. Si consideri la funzione definita ponendo $f(x,y) = (y-1)(2-y-x^2)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Si determinino i punti stazionari di f e li si classifichino utilizzando la matrice hessiana.
   (b) Si confermi mediante considerazioni alternative la classificazione ottenuta al punto precedente.
   (c) Si determinino gli estremi locali e globali di f.
   (d) (Facoltativo) Si determinino gli estremi globali di f sul vincolo di equazione $x^2 + y^2 - y = 0$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

9 gennaio 2023

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) = \dfrac{n\, e^{-x^2/n}}{n+1}\cdot$

   Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}$ e si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-2}^{1} f_n(x)\, dx\,.$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di potenze di centro $x_0 = 0$ e coefficienti $c_n = \dfrac{n^2 + 2^n}{n\, 3^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

   Si utilizzi quanto ottenuto per descrivere la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine $f_n(x) = \dfrac{n^2 + 2^n}{n} \left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^n$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = 3\, t^2 \tan(y) \quad (\text{con } y = y(t))$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determinino gli estremi globali nell'insieme $D := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\big\}$ della funzione definita ponendo

$$f(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}\cdot$$

Nota: alla prova scritta non sono presenti studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022 o precedenti.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

24 gennaio 2023

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{n^2\,x^2}{n+x^2}\right)\cdot$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) = n\left(e^{x^2/n^3} - 1\right)$.

   Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine f_n.

   Si stabilisca inoltre se tale serie può essere derivata termine a termine nell'intervallo $[0, 1]$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = t^3\,\dfrac{y}{y^3-1}$ (con $y = y(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino *implicitamente* le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determinino gli estremi globali nell'insieme $D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ della funzione definita ponendo

$$f(x, y) = 3\,x^2 + 4\,y^2 - 6\,x + 3$$

Nota: alla prova scritta non sono presenti studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022 o precedenti.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

7 febbraio 2023

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -\dfrac{\pi}{2\,n} \\ \sin(n\,x) & \text{se } -\dfrac{\pi}{2\,n} < x < \dfrac{\pi}{2\,n} \\ 1 & \text{se } \dfrac{\pi}{2\,n} \leq x \end{cases}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Si studino i modi di convergenza della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2}{1 + n^3\,x^4} \qquad (n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R})$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = -\dfrac{y}{3} - t\,y^4$ (con $y = y(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4a. **Solo per gli studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2022/2023**

Si determinino gli estremi globali della funzione definita ponendo $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$ nell'insieme $D = [-1, 2] \times [0, 2]$.

4b. **Solo per gli studenti che fanno riferimento al programma dell'a.a. 2021/2022 o precedenti**

Si risolva il problema di Cauchy

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(t)}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

con $y = y(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

27 aprile 2023

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{e^{-n\,x}}{3 + e^{-n\,x}}\,.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{1}{n + 3\,\ln(n)}\,\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^n\,.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = 3\,t^2\,(e^y - e^{-y})\quad(\text{con } y = y(t))$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y'' - y' = t\,e^{2t}\,.$$

Nota: alla prova non sono presenti studenti che fanno riferimento al programma dell'anno accademico 2022/2023.