Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica III

Anno accademico 2021/22

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - \frac{2}{t}\, y' + \left(1 + \frac{2}{t^2}\right) y = t\, e^t\,, \qquad t \in (0, +\infty)\,. \tag{1}$$

   (a) Si verifichi che le funzioni definite ponendo $\varphi(t) = t\, \cos(t)$ e $\psi(t) = t\, \sin(t)$ per $t \in (0, +\infty)$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

   (b) Si utilizzi il metodo di variazione delle costanti per determinare una soluzione dell'equazione (1).

   (c) Si scriva l'integrale generale dell'equazione (1).

   (d) Si determini la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione (1) di condizioni iniziali $y(\pi) = 0\,,\ y'(\pi) = 1\,.$

2. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} - 2\, y'' + y = 3\, t^2 + 4\,.$$

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) = n\, \left(e^{x^2/n} - 1\right)\,.$

   (a) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}$.

   (b) Si calcoli $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx\,.$

4. Per $x \in [-1, 1]$ siano $f(x) = e^x\,,\ g(x) = x^2 + 1\,.$

   Denotata con d_1 la distanza lagrangiana nello spazio $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$, si calcoli $d_1(f, g)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

9 novembre 2021

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) = n\left(e^{x^2/n} - 1\right)$.

   (a) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $\{f_n\}$.

   (b) Si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = (-1)^n \arctan\left(\frac{e^{-n\,x}}{n+3}\right) .$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = \dfrac{x}{t} - \dfrac{e^t}{2}\,x^3$ (con $x = x(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = 6\,x - y, \quad y' = 4\,x + 2\,y$$

   con $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica III

Anno accademico 2021/22

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ sia $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n\,2^n + 3}$.

   (a) Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di potenze di centro $x_0 = 0$ e coefficienti $\{c_n\}$.

   (b) Si utilizzi quanto ottenuto al punto (a) per descrivere la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
   $$f_n(x) = \frac{(2\,x - 1)^n}{(n\,2^n + 3)\,x^n}\,.$$

   (c) Denotata con f la funzione somma della serie di potenze assegnata in (a), si determini $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ con un errore inferiore a 10^{-3}.

2. Si consideri la funzione $f(x) = |\sin(x)|$, periodica di periodo π.

   (a) Si descriva, in base alla teoria, la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier di f.

   (b) Si calcolino i coefficienti di Fourier e si scriva la serie di Fourier di f.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = (1 - t)\,y\,(\ln y)^3 \quad (\text{con } y = y(t))$.

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino le soluzioni massimali, specificandone gli intervalli di esistenza e descrivendone il comportamento agli estremi di tali intervalli.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

10 gennaio 2022

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{n\,(e^{n\,x}+1)}{n+x^2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{x^n\,(1-x^2)^n}{n+6^n}\,.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = t\,y + \dfrac{t^3}{y}$ (con $y = y(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y''' - 3\,y'' - y' + 3\,y = \cos(t)\,.$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

25 gennaio 2022

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\dfrac{x}{n}\right) & |x| \leq n\,\pi, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = (-1)^n \, \frac{\ln(1 + |x|^n)}{n^2} \, .$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = t\,(y^3 - y)$ (con $y = y(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y''' + y' + 2\,y = t\,e^{-t} \, .$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

8 febbraio 2022

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{n\,x^n}{n + x^2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{1}{n\,x^{2n}} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) ,$$

con $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}^*$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = t\,\dfrac{\sqrt{4 - y^2}}{y}$ (con $y = y(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y''' - 4\,y'' + 4\,y' = t^2 + e^t \,.$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

22 febbraio 2022

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{n\,e^x}{n+x}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}_+$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2\,2^n+1}\left(\frac{x^4+3}{4\,x}\right)^n,$$

con $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}^*$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{y^2+3\,y}{t+1}$ (con $y = y(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y''' - 3\,y' + 2\,y = e^t + 1\,.$$

(Suggerimento: si tenga presente il principio di sovrapposizione.)

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

21 aprile 2022

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{n\,x^2 + 1}{n\,(1 + e^{-n})}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{n\,x\,e^{-nx^2}}{n+1}\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = y - t\,y^{7/5}$ (con $y = y(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y''' + 6\,y'' + 16\,y' + 16\,y = (4\,t + 1)\,e^{-2\,t}\,.$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

14 giugno 2022

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{e^{-n\,x^3}}{2 + e^{-n\,x^3}}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{n\left(\ln(x) - 1\right)^n}{2^n + 3}$$

con $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \,]0, +\infty[$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{6}{t}\,y + 2\,t^2\,y^{3/2}$ (con $y = y(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

Si risolva <u>uno a scelta</u> tra i seguenti quesiti:

(4a) Si risolva l'equazione differenziale $t^3\,y''' + 4\,t^2\,y'' = 3 + \sqrt{t}$, con $y = y(t)$.

(4b) Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = 4\,y, \quad y' = x + y + z, \quad z' = 3\,x - y + 3\,z$$

con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

29 giugno 2022

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo
$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{n\,x^2}{1+n\,x^2}\right)$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = (-1)^n\,\frac{n}{x^{2n}+1}$$
con $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = t\,(y^2 - 2\,y)$ (con $y = y(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

Si risolva <u>uno a scelta</u> tra i seguenti quesiti:

(4a) Si risolva il problema di Cauchy
$$y'' - 6\,y' + 13\,y = \cos(2\,t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1\,.$$

(4b) Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = 4\,y, \quad y' = x + y + z, \quad z' = 3\,x - y + 3\,z$$
con $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

14 luglio 2022

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo
$$f_n(x) = \frac{\ln(1+|x|^n)}{n}$$
per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$.

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^3+1} \left(\frac{x+3}{2-x}\right)^n$$
con $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = y + (t-1)\, y^3$ (con $y = y(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

Si risolva uno a scelta tra i seguenti quesiti:

(4a) Si risolva il problema di Cauchy
$$t^2\, y'' - t\, y' + 5\, y = t^2 \ln(t), \quad y(1) = 0,\ y'(1) = -1\,.$$

(4b) Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = 4\,y, \quad y' = x + y + z, \quad z' = 3\,x - y + 3\,z$$
con $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

8 settembre 2022

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(n\,x) & |x| \leq \dfrac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{x^2\,e^{-x^2/n}}{n+3}$$

con $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{y}{3\,t} + \ln(t)\,y^4 \quad (\text{con } y = y(t))$.
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

Si risolva uno a scelta tra i seguenti quesiti:

(4a) Si risolva l'equazione differenziale $y''' - y'' - 5\,y' - 3\,y = t^2\,e^{-t}$, con $y = y(t)$.

(4b) Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = -y + z, \quad y' = z, \quad z' = -x + z$$

con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.