Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica III – traccia 1

Anno accademico 2020/21

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) = \dfrac{x^2\, e^{-x^2/n^2}}{n^2+1}$.

   (i) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}$.

   (ii) Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine f_n.

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ sia $c_n = (-1)^n \dfrac{4^n+1}{n}$.

   (i) Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di potenze di centro $x_0 = 0$ e coefficienti $\{c_n\}$.

   (ii) Si utilizzi quanto ottenuto al punto precedente per descrivere la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{4^n+1}{n} \left(\frac{x-2}{x^2-4\,x+8} \right)^n .$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica III – traccia 2

Anno accademico 2020/21

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) = (n+1)^2\, x^2\, e^{-n^2 x^2}$.

   (i) Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}$.

   (ii) Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine f_n.

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ sia $c_n = \dfrac{3^n - 1}{n}$.

   (i) Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di potenze di centro $x_0 = 0$ e coefficienti $\{c_n\}$.

   (ii) Si utilizzi quanto ottenuto al punto precedente per descrivere la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{3^n - 1}{n\, 3^n} \left(\frac{2 - x^2}{x^2 + 2} \right)^n .$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

10 novembre 2020 (appello straordinario)

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{x^2\, e^{-x^2/n^2}}{n^2+1}\,.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = (-1)^n\, \frac{4^n+1}{n} \left(\frac{x-2}{x^2-4\,x+8}\right)^n .$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = \dfrac{t\,(1-x^2)}{t^2+1}$ (con $x = x(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino in forma esplicita le soluzioni, specificandone l'intervallo di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = -y - z, \quad y' = -2\,x + y + 2\,z, \quad z' = -x + y$$

con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di Analisi Matematica III

Anno accademico 2020/21

1. Si consideri l'equazione differenziale $x' = \dfrac{t-1}{t}\sqrt{1-x^2}$ (con $x = x(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino le soluzioni massimali, specificandone gli intervalli di esistenza e descrivendone il comportamento agli estremi di tali intervalli.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa.

2. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = x + y - z, \quad y' = -x + 3\,y - 3\,z, \quad z' = -4\,x$$

   con $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$.
   Si determini inoltre la soluzione del problema di Cauchy di condizione iniziale

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = -1.$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

12 gennaio 2021

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo, per $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f_n(x) = \ln\left(\frac{n\,x^4}{n + x^2}\right).$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = (-1)^n\,\frac{n}{2\,n + 4}\,e^{n\,x}.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = -\frac{2}{3}\,t\,x + \frac{1}{3}\,t^3\,x^4 \quad (\text{con } x = x(t))$.
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino le soluzioni, specificandone qualitativamente gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = 2\,x + y + e^t, \quad y' = 4\,x - y - e^{5\,t}$$
con $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

26 gennaio 2021

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo, per $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ \cos(n\,\pi\,x) & \text{se } x \in (0, 3/n) \\ -1 & \text{se } x \in [3/n, +\infty). \end{cases}$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2\,x^n}\,\sin\left(\frac{1}{n\,\ln(x)}\right).$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = (1 + e^{-t})\,\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x}$ (con $x = x(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino le soluzioni, specificandone qualitativamente gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$x' = x, \quad y' = x + 3\,y + 2\,z, \quad z' = 2\,x + 3\,y + 4\,z$$

   con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
   Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni che tendono a $(0, 0, 0)$ per $t \to +\infty$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

9 febbraio 2021

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo, per $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \frac{n\,x}{n\,x^2+1}\sqrt{x^2+\frac{2}{n}}.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^3+4}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^n.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = 3\,x + t\,x^2$ (con $x = x(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino le soluzioni, specificandone qualitativamente gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = 3\,x - 2\,y, \quad y' = 4\,x - 3\,y$$
con $x = x(t)$, $y = y(t)$.
Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni aventi limite finito per $t \to +\infty$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

23 febbraio 2021

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo, per $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \frac{n\,x^2 + 1}{n\,(1 + e^{-n})}.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = (-1)^n \ln\left(\frac{n + |x|}{n}\right) .$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = \dfrac{2\,t^2 + 1}{t}\,x\,\big(\ln(x)\big)^2$ (con $x = x(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino le soluzioni, specificandone qualitativamente gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = y - z, \quad y' = -x - 3\,y, \quad z' = y - z$$
con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni che tendono a $(0, 0, 0)$ per $t \to +\infty$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

21 aprile 2021

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo, per $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \frac{n}{n+1}\, e^{-\dfrac{n\,x^2+1}{n^2}}\,.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = \frac{n+2^n}{n^2}\,\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^n.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = -\dfrac{2\,x}{t} + t^2\,x^2 \quad (\text{con } x = x(t))$.
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = \frac{3}{2}\,x + 3\,y, \quad y' = -y + z, \quad z' = \frac{1}{2}\,x + z$$
con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni che tendono a $(0,0,0)$ per $t \to +\infty$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

10 giugno 2021

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo, per $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \frac{(x^2 - n^2)^2}{n^4}\,.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = (-1)^n \, \frac{(n\,x + 1)\,e^{-n\,x}}{n}\,.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = \dfrac{x\,(t-1)}{x+1}$ (con $x = x(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino *implicitamente* le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza e descrivendone il comportamento agli estremi di tali intervalli.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = x - y, \quad y' = 2\,y - 2\,z, \quad z' = -x + z$$
con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.
Si stabilisca se il sistema ammette soluzioni che tendono a $(0,0,0)$ per $t \to +\infty$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

24 giugno 2021

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo, per $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^{2n}}{n+2}\right) .$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine $(-1)^n f_n$, dove f_n è la successione definita nel quesito 1.

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = 3\sqrt{t+1}\,(x^2-1) \quad$ (con $x = x(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = 6\,x - y, \quad y' = 4\,x + 2\,y$$
con $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

8 luglio 2021

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \arctan(x + n^2)\,.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = (-1)^n \frac{n + x^2}{n^2 + 3}\,.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = t^{1/3}\,(2\,x + x^{1/3})$ (con $x = x(t)$).
   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.
   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.
   (c) Si determinino le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.
   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = x - y\,, \quad y' = 2\,y + \frac{1}{4}\,z\,, \quad z' = x - y$$
con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica III

7 settembre 2021

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita ponendo, per $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = e^{n\,(2-x)} \frac{n\,x}{x^2 + n}\,.$$

2. Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni di termine
$$f_n(x) = \frac{x^n\,(1-x)^n}{n+1}\,.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale $x' = \dfrac{t^2\,(1-x^2)^{2/3}}{x}$ (con $x = x(t)$).

   (a) Si discuta l'applicabilità dei teoremi di esistenza e unicità locale e globale.

   (b) In base all'analisi del secondo membro dell'equazione, si ricavino informazioni sulla monotonia delle soluzioni e sui possibili asintoti orizzontali per i grafici delle stesse.

   (c) Si determinino le soluzioni, specificandone gli intervalli di esistenza.

   (d) Si tracci il grafico di qualche soluzione rappresentativa, evidenziando il comportamento agli estremi dell'intervallo di esistenza.

4. Si determini l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$x' = x - y, \quad y' = 2\,x - y$$
con $x = x(t)$, $y = y(t)$.