Corso di Laurea Triennale in Fisica

Svolgimento di alcuni quesiti assegnati nelle prove scritte di Analisi Matematica III nell'a.a. 2019/20

Nota: lo svolgimento proposto non è l'unico possibile e ha valore indicativo. Chi desidera segnalare imprecisioni o proporre miglioramenti può farlo scrivendo a monica.lazzo@uniba.it.

Prova scritta del 7 febbraio 2020 – quesito A2

Si studi la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di termine

$$f_n(x) = (-1)^n \ln\left(\frac{n+x^2}{n+1}\right).$$

Svolgimento

Riscrivo $f_n(x) = (-1)^n g_n(x)$, con

$$g_n(x) := \ln\left(\frac{n+x^2}{n+1}\right) = \ln\left(1+\frac{x^2-1}{n+1}\right).$$

Per $x \in \{-1, 1\}$ risulta $g_n(x) = 0$ per ogni n.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ la successione $\{g_n(x)\}$ è infinitesima. Inoltre: se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, la successione $\{g_n(x)\}$ è a termini positivi ed è decrescente (l'ultima affermazione si giustifica osservando che la successione $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ è decrescente, x^2-1 è *positivo*, e la funzione logaritmo è crescente); se $x \in (-1, 1)$, la successione $\{g_n(x)\}$ è a termini negativi ed è crescente (l'ultima affermazione si giustifica come sopra, osservando però che x^2-1 è *negativo*).

Visto che per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Leibniz, concludo che la serie assegnata converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

Osservo inoltre che, come conseguenza della stima del resto prevista dal criterio di Leibniz, la serie assegnata converge uniformemente in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ se e solo se in tale sottoinsieme la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione identicamente nulla.

Fissato n, la funzione $|f_n|$ è pari, decrescente in $[0, 1]$, crescente in $[1, +\infty)$, e diverge positivamente per $x \to +\infty$. Ne segue che $\sup\limits_{\mathbb{R}} |f_n| = +\infty$ per ogni n, pertanto la serie non converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Fissato $a \in \mathbb{R}^*_+$, per ogni n si ha

$$\sup_{[-a,a]} |f_n| = \max\big\{|f_n(0)|, |f_n(a)|\big\};$$

dato che le successioni $\{f_n(0)\}$ e $\{f_n(a)\}$ sono entrambe infinitesime, lo è anche la successione $\Big\{\sup\limits_{[-a,a]} |f_n|\Big\}$. Questo significa che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[-a, a]$ alla funzione identicamente nulla e, per quanto ricordato sopra, la serie assegnata converge uniformemente in $[-a, a]$.

Esamino adesso la convergenza assoluta. Banalmente, la serie converge assolutamente per $x \in \{-1, 1\}$. Fissato $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, risulta

$$|f_n(x)| = \left|\ln\left(1 + \frac{x^2 - 1}{n + 1}\right)\right| \sim \left|\frac{x^2 - 1}{n + 1}\right|$$

per $n \to +\infty$. Per il criterio del confronto asintotico, la serie di termine $|f_n(x)|$ ha lo stesso carattere di una serie multiplo della serie armonica, e pertanto diverge. Ne deduco che la serie assegnata converge assolutamente solo in $\{-1, 1\}$ e, di conseguenza, non converge totalmente in alcun intervallo di $\mathbb{R}$.