

Corso di Laurea Triennale in Fisica
Esame di **Analisi Matematica III**
a.a. 2013/2014 – programma definitivo
prof.ssa Monica Lazzo

Richiami su spazi metrici e spazi normati

Distanza. Spazio metrico. Intorni. Insiemi limitati; insiemi aperti; insiemi chiusi. Successione convergenti; successioni di Cauchy; completezza. Funzioni continue; continuità per successioni. Successioni estratte; insiemi sequenzialmente compatti. Teorema di Heine-Borel. Teorema di Weierstrass. Spazi normati; spazi di Banach. Serie in spazi normati. Criterio di Cauchy per le serie. Convergenza normale.

Successioni e serie di funzioni

Convergenza puntuale e uniforme di una successione di funzioni a valori in uno spazio metrico. Caratterizzazioni della convergenza uniforme. Convergenza uniforme e limitatezza*. Convergenza uniforme e integrabilità secondo Riemann; passaggio al limite sotto il segno di integrale*. Convergenza uniforme e inversione dei limiti*. Convergenza uniforme e continuità. Teorema di Dini sulla convergenza uniforme*. Passaggio al limite sotto il segno di derivata*. Completezza degli spazi funzionali $B(X, Y)$ e $C_b(X, Y)$ rispetto alla metrifica dell'estremo superiore. Completezza di $C^1([a, b], \mathbb{R})$ rispetto alla metrifica lagrangiana. Compattezza in $C([a, b], \mathbb{R})$; teorema di Ascoli-Arzelà. Serie di funzioni a valori in uno spazio normato. Convergenza puntuale e uniforme. Condizioni necessarie per la convergenza puntuale e uniforme. Convergenza assoluta e totale; criterio di Weierstrass. Limitatezza della somma uniforme di una serie di funzioni limitate. Continuità della somma uniforme di una serie di funzioni continue. Integrazione e derivazione termine a termine.

Serie di potenze

Lemma fondamentale*. Struttura dell'insieme di convergenza. Raggio di convergenza. Criterio del rapporto e della radice per la determinazione del raggio di convergenza*. Continuità della somma di una serie di potenze; teorema di Abel. Integrazione termine a termine per le serie di potenze. Derivabilità della somma di una serie di potenze. Principio di identità delle serie di potenze. Somma di due serie di potenze. Prodotto secondo Cauchy di due serie numeriche; teorema di Mertens; prodotto di due serie di potenze. Serie di Taylor. Funzioni analitiche. Analiticità delle serie di potenze. Condizioni sufficienti per l'analiticità*. Analiticità di alcune funzioni elementari. Cenni sulla funzione esponenziale in campo complesso; identità di Eulero. Integrazione approssimata mediante serie di potenze; funzione degli errori. Sviluppi in serie di Taylor ottenuti mediante manipolazioni algebriche di sviluppi noti. Calcolo della somma di serie numeriche mediante lo studio di serie di potenze.

Serie trigonometriche

Polinomi trigonometrici; grado; principio di identità. Somma, differenza e prodotto di polinomi trigonometrici. Formule di ortogonalità. Serie trigonometriche. Condizione sufficiente per la convergenza totale. Coefficienti di Fourier. Serie di Fourier. Proprietà dei polinomi di Fourier rispetto alla media quadratica*. Disuguaglianza di Bessel; lemma di Riemann-Lebesgue. Convergenza in media quadratica delle serie di Fourier. Funzioni regolari a tratti. Convergenza puntuale delle serie di Fourier. Convergenza uniforme delle serie di Fourier*. Principio di localizzazione. Integrazione termine a termine per le serie di Fourier. Fenomeno di Gibbs. Calcolo della somma di serie numeriche mediante lo studio di serie di Fourier.

Equazioni differenziali

Equazioni differenziali ordinarie in forma generale e in forma normale. Soluzione di una equazione differenziale. Sistemi di equazioni differenziali in forma normale. Equivalenza tra equazioni di ordine n e sistemi di n equazioni del primo ordine. Problema di Cauchy. Funzioni lipschitziane e localmente lipschitziane; condizioni sufficienti per la lipschitzianità. Teorema di esistenza e unicità locale per sistemi di equazioni del primo ordine* e per equazioni di ordine n . Dipendenza continua dai dati iniziali e dai parametri. Regolarità delle soluzioni. Prolungamento di una soluzione. Condizioni sufficienti per la prolungabilità di una soluzione. Soluzioni massimali. Esistenza di prolungamenti massimali*. Comportamento delle soluzioni massimali agli estremi dell'intervallo di esistenza. Lemma di Gronwall*. Condizione di sublinearità. Teorema di esistenza e unicità globale*. Risoluzione di alcune classi di equazioni: a variabili separabili, di Manfredi, di Bernoulli, di Eulero. Studi qualitativi delle soluzioni di alcune equazioni differenziali del primo ordine. Risoluzione per serie; equazioni di Bessel e di Hermite.

Equazioni differenziali lineari

Sistemi lineari. Esistenza e unicità globale. Regolarità delle soluzioni. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo*. Sistema fondamentale di soluzioni. Matrice Wronskiana e determinante Wronskiano. Rappresentazione dell'integrale generale attraverso una matrice fondamentale. Matrice risolvente. Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti. Matrice esponenziale. Determinazione della matrice esponenziale di una matrice diagonale e di una matrice diagonalizzabile. Determinazione di un sistema fondamentale di soluzioni in presenza di autovalori complessi e di autovalori di molteplicità geometrica inferiore alla molteplicità algebrica; autovalori generalizzati. Sistemi lineari completi. Principio di sovrapposizione. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare completo*. Metodo di Lagrange per la determinazione di una soluzione del sistema completo. Equazioni lineari di ordine n . Regolarità delle soluzioni. Struttura dell'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea e di una equazione lineare completa. Equazioni lineari a coefficienti costanti: determinazione dell'integrale generale dell'equazione omogenea e metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare dell'equazione completa.

Note: gli argomenti sono raggruppati per attinenza; l'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso. La dimostrazione dei risultati contrassegnati con * è parte integrante del programma.

Testi consigliati

- A. Bacciotti, F. Ricci, Lezioni di analisi matematica 2, Editrice Levrotto & Bella
- V. Barutello, M. Conti, D. L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica Vol. 2, Apogeo
- E. Giusti, Analisi Matematica 2, Boringhieri
- C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica, vol. 2, Ed. Masson
- W. Rudin, Principi di analisi matematica, McGraw-Hill