

Corso di Laurea Triennale in Fisica  
Esame di **Analisi Matematica III**  
a.a. 2019/2020 – programma definitivo  
prof.ssa Monica Lazzo

**Complementi su successioni e serie numeriche**

Massimo limite e minimo limite di una successione: definizioni, esempi, caratterizzazioni e proprietà. Criterio della radice per le serie numeriche. Prodotto secondo Cauchy di due serie numeriche; teorema di Mertens.

**Richiami su spazi metrici e spazi normati**

Distanza. Spazio metrico. Intorni. Insiemi limitati; insiemi aperti; insiemi chiusi. Successioni convergenti; successioni di Cauchy; completezza. Successioni estratte; insiemi sequenzialmente compatti. Teorema di Heine-Borel. Funzioni continue; continuità per successioni. Teorema di Weierstrass. Spazi normati; spazi di Banach. Serie in spazi normati. Criterio di Cauchy per le serie. Convergenza normale; caratterizzazione della completezza.

**Successioni e serie di funzioni**

Convergenza puntuale e uniforme di una successione di funzioni a valori in uno spazio metrico. Convergenza uniforme e limitatezza\*. Convergenza uniforme e continuità\*. Convergenza uniforme e integrabilità secondo Riemann; passaggio al limite sotto il segno di integrale\*. Passaggio al limite sotto il segno di derivata\*. Completezza degli spazi funzionali  $B(X, Y)$  e  $C_b(X, Y)$  rispetto alla metrica dell'estremo superiore\*. Completezza di  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  rispetto alla metrica lagrangiana. Compattezza in  $C([a, b], \mathbb{R})$ . Serie di funzioni a valori in uno spazio normato. Convergenza puntuale e uniforme. Convergenza assoluta e totale. Limitatezza della somma uniforme di una serie di funzioni limitate. Continuità della somma uniforme di una serie di funzioni continue. Integrazione e derivazione termine a termine.

**Serie di potenze**

Lemma fondamentale\*. Struttura dell'insieme di convergenza\*; raggio di convergenza. Criteri per il calcolo del raggio di convergenza\*. Teorema di Abel. Operazioni con le serie di potenze. Continuità, integrabilità e derivabilità della somma di una serie di potenze. Principio di identità delle serie di potenze. Serie di Taylor. Funzioni analitiche. Analiticità delle serie di potenze. Condizioni sufficienti per l'analiticità\*. Analiticità di alcune funzioni elementari. Integrazione approssimata mediante serie di potenze. Sviluppi in serie di Taylor ottenuti mediante manipolazioni algebriche di sviluppi noti.

**Serie trigonometriche**

Polinomi trigonometrici. Somma, differenza e prodotto di polinomi trigonometrici. Formule di ortogonalità. Serie trigonometriche. Condizione sufficiente per la convergenza totale. Coefficienti di Fourier. Serie di Fourier. Proprietà dei polinomi di Fourier rispetto alla media quadratica. Disuguaglianza di Bessel; lemma di Riemann-Lebesgue. Convergenza in media quadratica delle serie di Fourier. Funzioni continue a tratti e funzioni regolari a tratti. Convergenza puntuale e convergenza uniforme delle serie di Fourier.

## **Equazioni differenziali**

Equazioni differenziali ordinarie in forma generale e in forma normale. Soluzione di una equazione differenziale. Sistemi di equazioni differenziali in forma normale. Equivalenza tra una equazione di ordine  $n$  e un sistema di  $n$  equazioni del primo ordine. Problema di Cauchy. Funzioni lipschitziane e funzioni localmente lipschitziane; condizioni sufficienti per la lipschitzianità. Teorema di esistenza e unicità locale per sistemi di equazioni del primo ordine\* e per equazioni di ordine  $n$ . Regolarità delle soluzioni. Cenni sulla dipendenza continua dai dati. Prolungamento di una soluzione; soluzioni massimali. Condizioni sufficienti per la prolungabilità. Comportamento delle soluzioni massimali agli estremi dell'intervallo di esistenza. Funzioni sublineari; condizioni sufficienti per la sublinearità. Globalità delle soluzioni massimali in ipotesi di sublinearità\*. Teorema di esistenza e unicità globale. Risoluzione di alcune classi di equazioni del primo ordine: a variabili separabili, di Bernoulli. Studio qualitativo delle soluzioni di alcune equazioni differenziali del primo ordine.

## **Equazioni differenziali lineari**

Sistemi lineari. Principio di sovrapposizione. Struttura dell'insieme delle soluzioni\*. Sistemi lineari omogenei. Sistema fondamentale di soluzioni. Matrice Wronskiana e determinante Wronskiano. Caratterizzazione di un sistema fondamentale di soluzioni\*. Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti. Matrice esponenziale. Determinazione di un sistema fondamentale di soluzioni di un sistema lineare omogeneo; autovettori generalizzati. Sistemi lineari completi. Metodo di Lagrange per la determinazione di una soluzione particolare di un sistema completo. Equazioni lineari di ordine  $n$ . Struttura dell'insieme delle soluzioni. Metodo di Lagrange. Equazioni lineari a coefficienti costanti: determinazione di un sistema fondamentale di soluzioni di una equazione omogenea e metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare di una equazione completa.

## **Note**

Gli argomenti sono raggruppati per attinenza; l'ordine in cui essi sono elencati non coincide necessariamente con l'ordine in cui sono stati trattati durante il corso.

La dimostrazione dei risultati contrassegnati con \* è parte integrante del programma.

## **Testi consigliati**

C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 2, Zanichelli

G. C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di analisi matematica Volume 2, Zanichelli

V. Barutello, M. Conti, D. L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi matematica Vol. 2, Apogeo

E. Giusti, Analisi Matematica 2, Boringhieri

W. Rudin, Principi di analisi matematica, McGraw-Hill