18 dicembre 2024

Es:

$(\bar{P}) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad$ $(P_k) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 + \frac{1}{k} \end{cases}$

$\varphi(t) = c e^t$

$\bar{t} = 0 = t_k \quad \forall k$

$\bar{x} = 1 \qquad x_k = 1 + \frac{1}{k}$

$f(t,x) = f_k(t,x) = x \quad \forall k$

Unica sol. di $(\bar{P})$: $\quad \varphi(t) = e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Unica sol. di (P_k): $\quad \varphi_k(t) = \left(1 + \frac{1}{k}\right) e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Oss: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\quad \varphi_k(t) \to \varphi(t)$

(conv. punt. in $\mathbb{R}$)

Fissato k:

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_k - \varphi| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \left(1 + \frac{1}{k}\right) e^t - e^t \right|$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{k} e^t = +\infty$$

$\Rightarrow$ NO conv. unif. in $\mathbb{R}$

C'è conv. unif. in $(-\infty, a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad \square$

Sublinearità per $f: \underbrace{I}_{\subseteq \mathbb{R} \text{ intervallo}} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Dico che f è sublineare se :

per ogni K intervallo compatto contenuto in I

esistono $p, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}_+^*$ t.c.

$\forall (t, x_1, \dots, x_n) \in K \times \mathbb{R}^n$:

$$|f(t, x_1, \dots, x_n)| \leq p + q_1|x_1| + \dots + q_n|x_n|$$

Oss: data $\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di componenti $(f_1, \dots, f_n)$

si ha:

$\mathbf{f}$ è sublineare $\iff$ $\forall i$: f_i è sublineare

("Ingrediente" : $|x_i| \leq \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$)

Giustifico ①

Ipotesi: $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$

Sia φ sol. di:

$$(ES) \qquad \varphi^{(n)} = f(t, \varphi, \dots, \varphi^{(n-1)})$$

$$\Rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ sol. di:}$$

$$(EV) \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

con $f(t, \mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ buonissime! classe C^k

di classe C^k

$\Rightarrow \Phi$ di classe C^{k+1}

$\Rightarrow$ tutte le componenti di Φ sono di classe C^{k+1}

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \varphi^{(n-1)} \text{ di classe } C^{k+1} \\
&\Rightarrow \varphi^{(n-2)} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad C^{k+2} \\
&\Rightarrow \varphi^{(n-3)} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad C^{k+3} \\
&\quad \vdots \\
&\Rightarrow \underbrace{\varphi^{(n-n)}}_{= \varphi^{(0)} = \varphi} \text{ di classe } C^{k+n}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Giustifico il "teoremone"

Riscrivo l'equazione

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, y = b(t)$$

in forma normale:

$$y^{(n)} = b(t) - a_0(t)\, y - \dots - a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}$$

ossia
$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

con

$$f(t, x_1, \dots, x_n) := b(t) - a_0(t)\, \overset{a_1(t) x_2}{x_1} - \dots - a_{n-1}(t)\, x_n$$

- $\text{dom}(f) = I \times \mathbb{R}^n$ (di tipo "striscia")

- $f \in C(I \times \mathbb{R}^n)$ $= C^0$

  $\Rightarrow$ tutte le sol. di $(*)$ sono di classe $C^{0+n} = C^n$

- Per $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_1, \dots, x_n) = -\underbrace{a_{j-1}(t)}$$

continua in I (rispetto a t)

$\Rightarrow$ continua in $I \times \mathbb{R}^n$ (rispetto a $t, x_1, \dots, x_n$)

cond. suff.

$\Rightarrow$ f è loc. lipsch. in $I \times \mathbb{R}^n$ rispetto a $x = (x_1, \dots, x_n)$ uniform. in t

- Fisso $K \subseteq I$ intervallo compatto.

Valuto

$$|f(t, x_1, \dots, x_n)| = |b(t) - a_0(t) x_1 - \dots - a_{n-1}(t) x_n|$$

$$\leq |b(t)| + |a_0(t)|\,|x_1| + \dots + |a_{n-1}(t)|\,|x_n|$$

$$\leq \overbrace{\max_K |b|}^{=:\, p} + \overbrace{\max_K |a_0|}^{=:\, q_1} |x_1| + \dots + \overbrace{\max_K |a_{n-1}|}^{=:\, q_n} |x_n|$$

esiste per il teor. di Weierstrass

$$= p + q_1 |x_1| + \dots + q_n |x_n| .$$

$\Rightarrow$ f è sublineare in $I \times \mathbb{R}^n$.

$\square$